V26

AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UNA MATRICE

Le matrici $n \times n$ realizzano delle "trasformazioni" dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sé: $\underline{x}' = A\underline{x}$

Es. 1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ realizza la rotazione di un angolo α in $\mathbb{R}^2$

Es. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ realizza una trasformazione che dilata di un fattore 2 nella direzione dell'asse x e di " " 3 " " " " y

Es. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto all'asse x

Es. 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante

Es. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la proiezione ortogonale sull'asse x.

Per altre matrici è meno facile descrivere l'azione geometrica corrispondente.
Utile in questo senso stabilire se ci sono direzioni "privilegiate" che vengono trasformate in se stesse applicando A.
È ciò che succede in Es 2., 3., 5. per le direzioni dell'asse x e y e in Es. 4 per le direzioni delle 2 bisettrici del 1°-3°, 2°-4° quadrante.

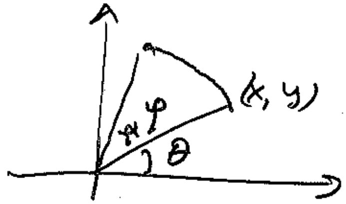
(1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

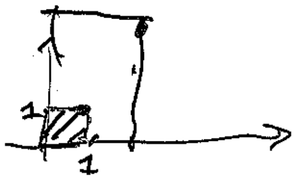
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

so le equazioni che descrivono una rotazione di α rad. intorno all'origine

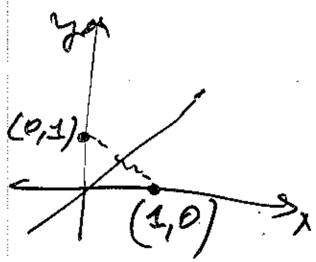
Per vederlo: $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$



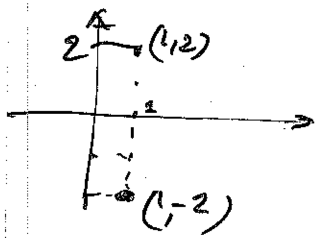
$(x', y') = (\rho\cos(\theta+\alpha), \rho\operatorname{sen}(\theta+\alpha))$
$= (\rho(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha), \rho(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha))$
$= (x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha, x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)$



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Questa condizione si traduce nella richiesta che esistano vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (\underline{0})$ e scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x},$$

λ autovalore di A
$\underline{x}$ autovettore di A relativo a λ

cioè

$$A\underline{x} = (\lambda I)\underline{x}$$

(λI è la matrice diagonale con λ in ogni posizione)

cioè

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0} \qquad (*)$$

Dunque il problema si riconduce a trovare dei valori λ tali che il sistema OMOGENEO $(*)$ non abbia solo la soluzione nulla, bensì almeno una intera "direzione" di soluzioni

Ciò si realizza per

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Equazione caratteristica di A: è polinomiale di grado n

Nel caso $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A.$$

ATTENZIONE: la ricerca di autovalori e autovettori ha soluzioni dipendenti dal campo numerico.
Ad es. se penso $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ come matrice a coefficienti reali, devo cercare $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ ... ed è chiaro che non li trovo, se $\alpha \neq 0, \pi$:

$$\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1 = 0 \quad \text{ha} \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$$

Ma se penso A a coefficienti in $\mathbb{C}$, e posso quindi cercare $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\underline{x} \in \mathbb{C}^2$, le soluzioni ci sono:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow (\cos\alpha - \cos\alpha \mp i\operatorname{sen}\alpha)x_1 - \operatorname{sen}\alpha\, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm x_1 \cdot i \Rightarrow \text{autovettore di } \lambda_1 : (t, it) \quad \lambda_2 : (t, -it)$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ voglio trovare autovalori e autovettori, cioè risolvere

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 - 0 \\ -1 - 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non voglio che $(0,0)$ sia la sola soluz.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = +3 \pm \sqrt{9 - 7} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 = \underbrace{(2 \cdot 4 - 1)}_{\det A} - \lambda\underbrace{(2+4)}_{a_{11}+a_{22}} + \lambda^2}$$

la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ha 2

autovalori distinti

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$$

autovettori relativi a λ_1

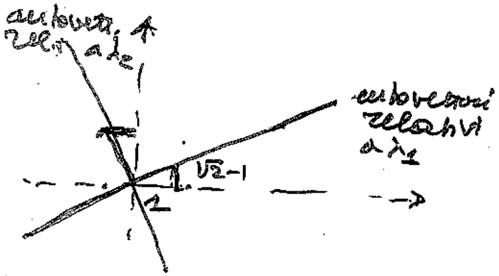
$$\begin{pmatrix} 2-(3-\sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 4-(3-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - y = 0 \\ -x + (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= (\sqrt{2}-1)x \\ y &= \frac{1}{1+\sqrt{2}}\, x \end{aligned}$$

sono la stessa equazione perché $\operatorname{rg}(A-\lambda_1 I) = 1$!

gli autovettori hanno la forma

$(t, (\sqrt{2}-1)t)$



autovettori relativi a λ_2

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + (1-\sqrt{2})y = 0$$
$$x = (1-\sqrt{2})y$$

gli autovettori hanno la forma

$$((1-\sqrt{2})s,\ s)$$

Gli autovett. relativi a λ_1 sono $\perp$ a quelli rel. a λ_2? Sì

$((1-\sqrt{2})s, s) \cdot (t, (\sqrt{2}-1)t) = (1-\sqrt{2})st + (\sqrt{2}-1)st = 0$

Vediamo qualche esempio semplice

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 0 = 0$ per $\lambda = 0$, $\lambda = -3$

Ricerca autovettori:

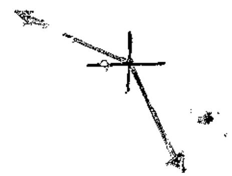
$(A - 0\cdot I)\,\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \boxed{-2x_1 - 4x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

equazione inutile $\operatorname{rg}(A-0\,I) = 1$

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$: $\underline{x} = (-2t, t)$

$(A+3I)\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -3$: $\underline{x} = (t, -2t)$



N.B. Quando $\det A = 0$, l'autovalore 0 c'è sempre.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ per $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$

se la matrice è triangolare gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale di A

Ricerca degli autovettori:

$\lambda = 1$: $(A - I)\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettori $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda = 2$: $(A - 2I)\,\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettori $(3t, t)$, $t \in$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

2 è un autovalore "doppio"

Autovettori corrispondenti: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $(t,0)$ $t \in \mathbb{R}$

In questo caso ci sono due autovalori coincidenti [illegible] indipendenti.

Invece se parto da $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ci sono anche due direzioni privilegiate indipendenti.

Il numero di direzioni privilegiate indipendenti prodotte da un autovalore si chiama MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore

Invece la sua molteplicità algebrica è la molteplicità dell'autovalore pensato come radice dell'equazione caratteristica.

Si dimostra

$$m.g. \leq m.a.$$

e se per ogni autovalore di A vale $=$ e la somma delle m.a. degli autovalori è $= n$ esiste una matrice invertibile U tale che

$$U^{-1} A U \text{ è diagonale}$$

e i suoi elementi non nulli sono gli autovalori (ciascuno presente con la sua m.a.)

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

equazione caratteristica: $(6-\lambda)((5-\lambda)^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 6$ con molteplicità algebrica 2

Autovettori relativi a $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ \boxed{x_1 + x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases}$$

INUTILE

gli autovettori hanno la forma $(t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$

Autovettori relativi a $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

INUTILI: rango della matrice del sistema $= 1$

Gli autovettori hanno la forma $(t, s, t) = t(1,0,1) + s(0,1,0)$

Si vede che ci sono due direzioni privilegiate indipendenti, ad es. $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ ... corrispondenti ad avere 2 parametri nelle soluzioni.

Ora osservo che

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

In generale la matrice U si costruisce proprio accostando i vettori colonna corrispondenti agli autovettori indipendenti

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \text{Autovalori}$$

$$(2-2)x_1 + 0x_2 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$\boxed{(s,t) = s(1,0) + t(0,1)} \quad \text{Autovettori: tutto } \mathbb{R}^2$$

Confrontare con l'esempio 3!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}? \quad \boxed{\text{Esercizi}}$$

$\det A = 6 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è come risolvere 3 sistemi con la stessa matrice A dei coefficienti e diversi vettori termine noto

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Sommo R3 a R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \quad \text{divido per 2 la 2a riga}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \quad \text{sommo a R1 } (-2)\text{R2 e } (-1)\text{R3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$f(t)=\frac{e^t-1}{\sqrt[3]{t^4-t^5}}$$

Dove è continua? Segno? $\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$ converge?

$F(t)=e^t-1$ def. e cont. in $\mathbb{R}$

$G(t)=\sqrt[3]{t^4-t^5}$ def e cont. in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{F(t)}{G(t)}$ def. purché $G(t)\neq 0$

$t^4(1-t)=0 \Leftrightarrow t=0$ o $t=1$

e continua su ciascuno degli intervalli

$(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$

$\to$ quindi esiste $\int_a^b f(t)\,dt$ con $a<b<0$.

Segno $\frac{e^t-1}{\sqrt[3]{t^4-t^5}}$ se $\boxed{t<0}$ $e^t-1<0$

$G(t)$ ha lo stesso segno di $t^4(1-t)$

$\Rightarrow G(t)>0$

$\Rightarrow$ se $t<0$ $f(t)<0$

$\boxed{0<t<1}$ $\left.\begin{array}{l}F(t)>0\\ G(t)=t^4(1-t)>0\end{array}\right\}$ $f(t)>0$

$\boxed{t>1}$ $\left.\begin{array}{l}F(t)>0\\ G(t)=t^4(1-t)<0\end{array}\right\}$ $f(t)<0$

Funzioni asintotiche in entrambi gli estremi di $(-\infty,0)$

per $t\to-\infty$ $F(t)=e^t-1\sim -1$

$G(t)=\sqrt[3]{t^4(1-t)}\sim\sqrt[3]{-t^5}$; $\frac{F}{G}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}=\frac{-1}{(-t)^{5/3}}$

per $t\to 0^-$ $F(t)=e^t-1\sim t$

$G(t)=\sqrt[3]{t^4(1-t)}\sim\sqrt[3]{t^4}=(-t)^{4/3}$

$$\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt}_{\text{I sp.}}+\underbrace{\int_{-1}^{0^-} f(t)\,dt}_{\text{II sp.}}$$

per $t\to-\infty$ $f(t)\sim\frac{-1}{(-t)^{5/3}}$ $\quad -\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{(-t)^{5/3}}\,dt=$

$=-\lim_{z\to-\infty}\int_z^{-1}\frac{1}{(-t)^{5/3}}\,dt=-\lim_{z\to-\infty}\left[\frac{3}{2}(-t)^{-2/3}\right]_z^{-1}=$

$=-\lim_{z\to-\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{(-z)^{2/3}}\right)=-\frac{3}{2}$ quantità finita

$\Rightarrow$ l'integrale impr. di I converge per il criterio del confronto asintotico.

per $t\to 0^-$ $f(t)\sim\frac{-(-t)}{(-t)^{4/3}}=\frac{-1}{(-t)^{1/3}}$

$\int_{-1}^{0^-}\frac{-1}{(-t)^{1/3}}\,dt=\lim_{z\to 0^-}\int_{-1}^{z}\frac{-1}{(-t)^{1/3}}\,dt=$

$\lim_{z\to 0^-}\left[\frac{3}{2}(-t)^{2/3}\right]_{-1}^{z}=\lim_{z\to 0^-}\frac{3}{2}\left((-z)^{2/3}-1^{2/3}\right)=$

$=-3/2$ converge

$\Rightarrow\int_{-1}^{0^-} f(t)\,dt$ conv. per il criterio del cfr. asintotico,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2-2}\,(y^2+y) \\ y(0)=0 \end{cases}$$ Risolvere $$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2-2}\,(y^2+y) \\ y(0)=-2 \end{cases}$$

precisando il dominio delle soluzione

il problema ammette 1 e 1 sola soluz. là dove la $f(x,y) = \frac{x}{x^2-2}(y^2+y)$ è continua con $f_y = \frac{x}{x^2-2}(2y+1)$ continua.

$x^2-2 \neq 0$
$x \neq \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ continua
$f_y(x,y)$ "

su ciascuno dei 3 insiemi $(-\infty,-\sqrt{2}) \times \mathbb{R}$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \times \mathbb{R}$, $(\sqrt{2},+\infty) \times \mathbb{R}$

come dominio posso prendere?

$y(0)$ la soluzione deve essere definita in $x=0$ $\Rightarrow$ la soluzione ha grafico in $(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ dominio della sol. è $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Nel primo caso la soluzione è:
$y(x)=0$: pensata in $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$