PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO:

in $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento:

se $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e n, q sono numeri interi positivi (m, p interi qualunque)

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \iff qm \leq pn$$

Es: $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{1} = p$ se $p>0$ e $n>0$

$-\frac{7}{2} < \frac{1}{100}$

$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$ ma $\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2}$

Per esso valgono le proprietà

O1 riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Q} : a \leq a$

O2 antisimmetrica: $\forall a,b \in \mathbb{Q} : a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a=b$

O3 transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{Q} : a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Inoltre tale ordinamento è compatibile con la struttura algebrica:

C1 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

C2 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}, \boxed{c>0} : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

O4 Ed è un ordinamento totale(*), cioè $\forall a,b \in \mathbb{Q}$ con $a \neq b$ si ha o $a<b$ o $b<a$.

Insieme dei razionali >0 ...

(*) Vedi CONTROESEMPIO a PAG 3

Ripresa dell'ultimo esercizio del 1/10/2012

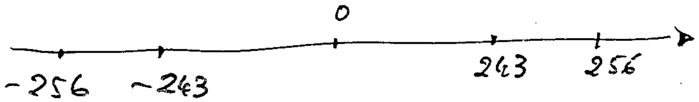
$$\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2}$$

Oculatamente

$$\frac{-2^7}{3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2} \iff -2^7 \cdot 2 \overset{?}{>} -3 \cdot 3^4$$

$$\iff -256 \overset{?}{>} -243$$

NO infatti:



Attenzione ad applicare male la regola!

$$2^7 \cdot 2 \overset{?}{>} (-3)(-3^4)$$

$$\| $$

$2^8 > 3^5$ sì!

FALSO

ma i denom. non erano entrambi >0

$\Rightarrow$ non posso usare la regola

Il problema si riflette nel calcolo delle soluz. di diseq.:

$\frac{x-5}{2x+1} \geq 1$ Come si risolve?

$\Updownarrow$ sottraggo 1 membro a membro

$\frac{x-5}{2x+1} - 1 \geq 0$

$\Updownarrow$ comune denominatore

$$\frac{x-5-(2x+1)}{2x+1} \geq 0 \iff \frac{x-5-2x-1}{2x+1} \geq 0$$

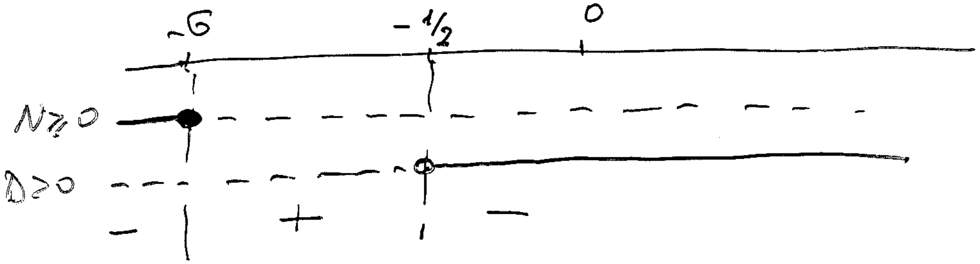
$$\frac{-x-6}{2x+1} \geq 0$$

frazione di cui mi chiedo quando è ≥ 0

Risposta: quando segno del denom. e del numeratore sono concordi (N.B. perché la frazione sia definita deve essere $2x+1 \neq 0$)

$N \geq 0$: $-x-6 \geq 0 \iff x \leq -6$

$D > 0$ $\quad 2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$



la disuguaglianza è soddisfatta da tutti gli x tali che $-6 \leq x < -1/2$

cioè è soluzione l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < -\frac{1}{2} \right\} = [-6, -1/2)$$

---

esempio di una diseq. che abbia 1 sola soluz (e non uno o più intervalli di soluzioni)

$x^2 \leq 0 \iff x = 0$

$$\frac{2x}{x^2+1} \geq 1$$

denominatore è sempre $\geq 1 > 0$
Allora posso "usare la regola"

$\Updownarrow$

$2x \geq x^2+1 \iff x^2-2x+1 \leq 0 \iff$

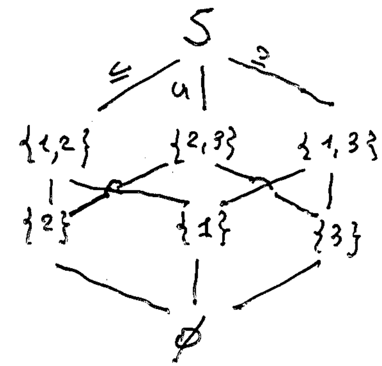
$\iff (x-1)^2 \leq 0 \iff x = 1.$

Esempio di un ordinamento non TOTALE

$S = \{1,2,3\}$

sottoinsiemi: S, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\emptyset$

la relazione di inclusione è una relazione d'ordine



Dimostrazione della 1a conseguenza della compatibilità: pag 4

$a \leq b \underset{C1\ +(-a)}{\Longrightarrow} a-a \leq b-a$: $0 \leq b-a \underset{C1\ +(-b)}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow 0-b \leq (b-a)-b = \underset{\substack{\parallel \\ 0-a}}{(b-b)} - a$ per prop. comm. e associativa

$\Longrightarrow -b \leq -a$

Se moltiplico per (-1) entrambi i membri della disug. la disug. cambia verso!

Conseguenze della compatibilità

$C1 \Rightarrow \quad a \le b \Rightarrow -b \le -a$

$C2 \Rightarrow \quad a \le b$ e $c < 0 \Rightarrow bc \le ac$

a, b di segno concorde, $a \le b$ $\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

ESERCIZI

$\forall a \in \mathbb{Q} \quad a^2 \ge 0$

$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad 2ab \le a^2 + b^2$

VEDI pag 6

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA: *

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$ con $0 < b < a$ $\exists n$ intero positivo t.c. $nb > a$

PROPRIETÀ DI DENSITÀ *

per ogni intero positivo fissato q e per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste un intero p tale che

$$\frac{p}{q} \le a < \frac{p+1}{q}$$

Differenza rispetto agli interi.

* Geometricamente ... Vedi pag 6

$c < 0 \overset{C1}{\Longrightarrow} -c > 0$

$a \le b \underset{C2}{\Longrightarrow} a(-c) \le b(-c) \overset{\text{propr. prodotto}}{\Longrightarrow} -ac \le -bc \underset{C1}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow bc \le ac$

$a \le b$ e $0 < a \le b \Rightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

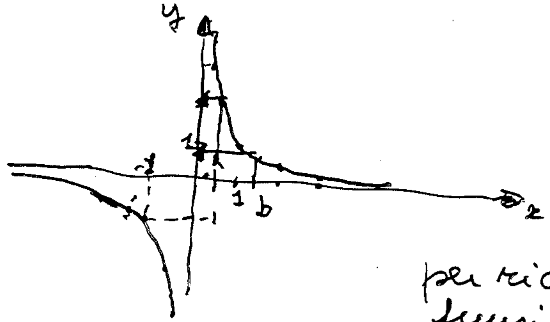
$a \le b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$0 < a \le b \underset{C2\,:\,\cdot\frac{1}{a}}{\Longrightarrow} 1 \le \frac{b}{a} \underset{C2\,:\,\cdot\frac{1}{b}}{\Longrightarrow} \frac{1}{b} \le \frac{\cancel{b}}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{b}}$

$a \le b < 0 \Rightarrow 0 < -b \le -a \Rightarrow \frac{1}{-a} \le \frac{1}{-b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$



$y = \frac{1}{x}$

per ricordarsi come funzionano le disug. sui reciproci

$a \in \mathbb{Q}$

$a \geq 0 \quad : \quad a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0 \quad ; \; a^2 \geq 0$

$a < 0 \quad \Rightarrow -a > 0 \quad \Rightarrow \quad (-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 0$

$\forall a,b \in \mathbb{Q} \qquad 2ab - a^2 - b^2 \leq 0 \; ?$

$-(a-b)^2 \leq 0 \quad$ sì

---

propr. Archimedea

Illustrazione delle due proprietà a pag. 4

$b = \frac{1}{10} \qquad a = \frac{9}{7} > 1$

$\exists n : \boxed{\frac{n}{10} > \frac{9}{7}} \qquad \boxed{\frac{n-1}{10} < \frac{9}{7} < \frac{n}{10}}$

proprietà di densità

$9/7$

Nel caso dell'esempio

$9 : 7 = 1,2$
20
6....

$1,2 < 9/7 < 1,3 \qquad$ cioè $\frac{12}{10} < \frac{9}{7} < \frac{13}{10}$

cioè basta scegliere $n = 13$

$9 : 7 = 1,\overline{285714}$

20
60
40
50
10
30
2

Quanto è lungo il periodo?
6
Avrebbe potuto essere lungo più di 6?
No poiché i resti nella divisione per 7 sono solo 7:
0: corrisponde alla divisibilità "esatta"
gli altri 6: 1,2,3,4,5,6 possono innescare il periodo, ma sono solo 6.

nella divisione tra numeri naturali se la divisione non è "esatta" (Resto $\neq 0$) si presenta un periodo che ha lunghezza non maggiore del "divisore -1".

Ogni numero razionale positivo p/q si può rappresentare in forma decimale, dividendo numeratore p per denom. q.

Possono succedere due situazioni:

(1) $q = 2^h 5^k$

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h 5^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suppongo } h \leq k}}{=} \frac{p \cdot 2^{k-h}}{2^h 5^k 2^{k-h}} = \frac{2^{k-h} \cdot p}{2^k \cdot 5^k} = \frac{2^{k-h} p}{10^k} \Rightarrow \text{numero decimale limitato}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{7}{125} = \frac{7 \cdot 2^3}{10^3} = \frac{56}{10^3} = 0,056 \quad \text{limitato}$$

(2) $q \neq 2^h 5^k \Rightarrow$ si presenterà un periodo.
$\Rightarrow$ numero decimale illimitato.

Quindi:
A ogni razionale(*) corrisponde 1 e 1 solo numero decimale o limitato o illimitato periodico

(*) per i negativi premettere il segno "$-$"

Viceversa? Attenzione alla necessità di identificare

$0,\overline{9} = 1,0 \quad \ldots \quad 1,1\overline{9} = 1,2 \quad$ ecc.

Infatti

1) se parto da un decimale limitato ricavo la frazione e quindi il num. razionale è immediato!

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

2) se parto da un decimale illimitato periodico mi comporto come in questi 2 esempi:

$$x = 0,\overline{45} \quad \Rightarrow \quad 100x = 45,\overline{45}$$

$$\underbrace{100x - x}_{99x} = 45,\overline{45} - 0,\overline{45} = 45$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

$$x = 1,2\overline{45} = 1,2 + 0,0\overline{45} = \frac{12}{10} + \frac{1}{10}\left(0,\overline{45}\right) =$$

$$= \frac{12}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{11} = \frac{12\cdot 11 + 5\cdot 10}{11\cdot 10} \in \mathbb{Q}$$

$$x = 0,\overline{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{9} = 1.$$