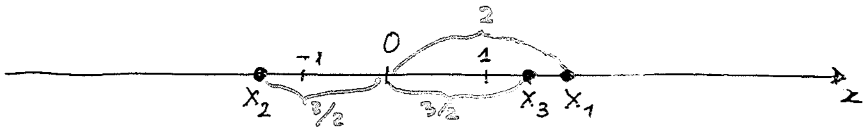
Definizione di valore assoluto (o modulo) di un numero razionale (oppure reale): x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0$$

$x < 0 \qquad -x > 0$

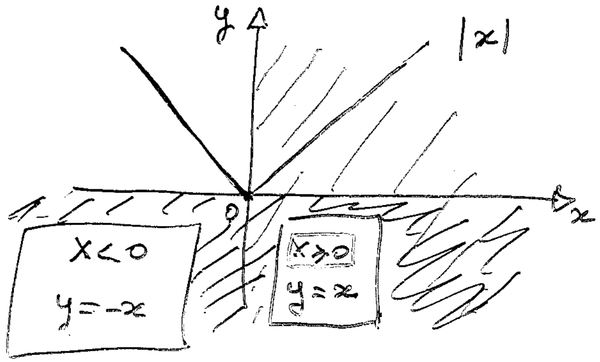
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -3/2 \qquad x_3 = 3/2$



$|x_1| = 2 \qquad |x_2| = \frac{3}{2} = |x_3|$

$|x|$ misura la distanza di x da 0

$y = |x|$



Decimali limitati
illimitati periodici } ---- Sono razionali

Ma esiste anche una scrittura di qs. tipo:

0,1010010001000001 ....

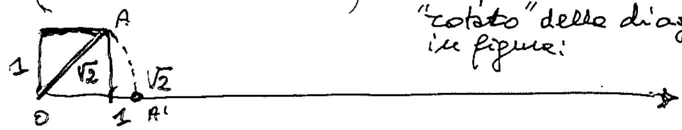
legge costruttiva chiara: ma che numero è?

Il numero "mi piacerebbe" che rappresentasse un punto della retta.

Ampliamo i razionali (identificati con gli allineamenti decimali limitati o illim. periodici) aggiungendo gli allin. decim. ILLIMITATI NON PERIODICI.

L'insieme di qs allineamenti (con le dovute identificazioni) lo chiamo insieme dei numeri reali.

Risolvo anche altri problemi come identificare il numero (sulla retta numerica) corrispondente all'estremo A' del segmento "ruotato" della diagonale OA del quadrato in figura:



$\sqrt{2} \in$ insieme dei reali

E' il modello + semplice (e rozzo) dell'insieme dei reali.

Perché $\sqrt{2}$ non è razionale?

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N}, \qquad MCD(p,q)=1$$

(cioè frazione ridotta ai minimi termini)

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$$

Allora 2 è un fattore di p^2. Ma se divide p^2 divide anche p: $p = 2h$

Quindi l'eguaglianza diventa $\cancel{2}q^2 = \cancel{4}^{2} h^2$

Cioè $q^2 = 2h^2 \ldots$ come sopra, allora, 2 divide anche q contro l'ipotesi che la frazione fosse ridotta ai minimi termini.

INVECE:

I numeri razionali non sono un insieme completo.

<u>Dim.</u>

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ e } x^2 < 2\}$ $\qquad A \ni 1 \qquad 1^2 < 2 \qquad A \neq \emptyset$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ e } x^2 > 2\}$ $\qquad B \ni 2 \qquad 2^2 > 2 \qquad B \neq \emptyset$

i due insiemi sono separati. Infatti considero

$\bar{a} \in A$ e <u>suppongo che sia $\bar{a} > \bar{b}$</u> ove $\bar{b}$ è un opportuno elem. di B

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{a} > 0 & \bar{a}\bar{a} > \bar{b}\bar{a} \\ \bar{b} > 0 & \bar{a}\bar{b} > \bar{b}\bar{b} \end{array}\right\} \implies \bar{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}^2 > \bar{b}\bar{b} = \bar{b}^2 > 2$$

$$\implies \bar{a}^2 > 2 \quad \text{: ma } \bar{a} \in A \text{ e quindi } \bar{a}^2 < 2$$

<u>Non può succedere.</u>

C'è un elem. separatore $r \in \mathbb{Q}$ degli insiemi A e B? Se sì non può essere $r^2 = 2$ (vedi sopra). Se $r^2 < 2$ esiste almeno un $a > r$ ($a \in A$): basta prendere $k \in \mathbb{Q}$ con $k < \sqrt{2} - r$ e $a = r + k$. Quindi non è $r \geq a$ $\forall a \in A$. Simmetricamente per $r^2 > 2$.

Problema di $\sqrt{2}$

(geometricamente) problema dei punti della retta non rappresentati da numeri razionali

Soluzione: ampliamento del CAMPO ORDINATO ARCHIMEDEO $\mathbb{Q}$

Dal punto di vista dell'insieme di numeri: prendo ogni allineamento decimale

- limitato o non limitato
- periodico o <u>non periodico</u>

IRRAZIONALI

(ATTENZIONE alle necessarie identificazioni:

$0.\bar{9} = \ldots$)

È uno dei tanti MODELLI dell'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono def. $+, \cdot, \leq$ e godono delle proprietà viste in $\mathbb{Q}$.

In più

COMPLETEZZA: dati comunque due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ t.c.

$$\forall a \in A, \ \forall b \in B \quad \text{risulti } a \leq b$$

ESISTE ALMENO un numero reale c t.c.

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$