1

RIASSUNTO delle PUNTATE PRECEDENTI

$\mathbb{Q}$ operazioni alg. (propr.)
ordinamento (") : DENSITÀ
identificati con particolari allineam. decimali

E gli altri allineam. decimali?

$\mathbb{R}$ reali = {razionali} ∪ {irrazionali}
all. decimali illimitati non periodici

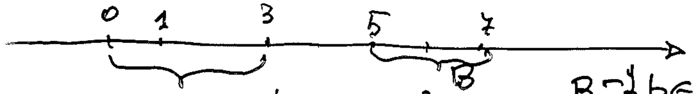
operazioni : hanno le stesse proprietà di + e · in $\mathbb{Q}$
ordinamento: ha " viste in $\mathbb{Q}$

in particolare $\forall r \in \mathbb{R}$ e $\forall p \in \mathbb{N}$
esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\frac{q}{p} \le r \le \frac{q+1}{p} \quad \text{(DENSITÀ)}$$

+ COMPLETEZZA

2



$A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \le a \le 3\}$ $B = \{b \in \mathbb{R} \mid 5 \le b \le 7\}$

$a < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

commento alla domanda a pagina 3

Chi posso scegliere come c?
uno qualunque dei c tali che $3 \le c \le 5$
Ci sono infiniti elementi separatori!

Con l'assioma di completezza posso garantire che ogni equazione della forma

$$x^n = k$$

ove $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$
ha 1 e 1 sola soluzione positiva,
che chiamo "radice n-esima ARITMETICA di x"

Ad es.
se $x^2 = 2$
la sua soluz. positiva è $x = \sqrt{2}$
se $x^3 = 10$:
la sua sol. positiva è $x = \sqrt[3]{10}$

Controesempio:

$$x^2 = -1$$

So però per altra via che $x^2+1 \geq 1$ e quindi non può essere $=0$

Il teorema non afferma nulla su quest'equaz. poiché per applicarlo k deve essere ≥ 0.

Controesempio su $\mathbb{Q}$. (visto ieri che non è completo)

Perché ALMENO 1 ? (VEDI pag 2)

<u>Condizione equivalente</u> ? DEFINIZIONI

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto <u>limitato</u> se esistono $\ell, L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad \ell \leq x \leq L$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto <u>superiormente limitato</u> se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad x \leq L$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto <u>inferiormente limitato</u> se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad \ell \leq x$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ <u>ammette estremo superiore</u> $\sup E$ se
  $\exists\, S = \sup E \mid \forall x \in E$ risulta $x \leq \sup E$ e
  $\forall y \in \mathbb{R}\ \{$t.c. $\forall x \in E$ risulti $x \leq y\} \Rightarrow \sup E \leq y$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ <u>ammette estremo inferiore</u> $\inf E$ se
  $\exists\, I = \inf E \mid \forall x \in E$ risulta $I \leq x$ e
  $\forall y \in \mathbb{R}$ t.c. $\{\forall x \in E$ risulti $y \leq x\} \Rightarrow y \leq I$
- M <u>massimo</u> di E
  Se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$ dico che $\sup E$ è il massimo di E
- m <u>minimo</u> di E
  Se $\inf E$ esiste ed $\inf E \in E$ dico che $\inf E$ è il minimo di E

TERMINOLOGIA

Tra i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ alcuni rivestono particolare importanza ... tanto da meritare un nome

intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =: (a,b) =:]a,b[$$

intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a,b]$$

intervallo semiaperto a sinistra ...

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =: (a,b]$$

intervallo semiaperto a destra ....

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =: [a,b)$$

Per analogia, anche gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =: (-\infty, a)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =: (-\infty, a]$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =: (a, +\infty)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} =: [a, +\infty)$$

saranno detti talora intervalli (illimitati).

Ogni intervallo aperto limitato contenente un numero x_0 sarà detto intorno di x_0. L'intervallo aperto limitato

$$U(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

sarà detto intorno (di x_0) centrato in x_0 e di semiampiezza r.

Un numero x_0 sarà detto punto di accumulazione per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di x_0 c'è almeno 1 elem. di A. Ad es. $x_0 = a$ è punto di accumulazione per $A = (a,b)$.

$E = [1,3)$

$\operatorname{Sup} E = 3$ non è massimo!!
$\operatorname{Inf} E = 1 = \operatorname{MIN}(E)$

è limitato? Sì perché posso trovare l e L t.c. $\forall x \in [1,3)$ si abbia $l \leq x \leq L$

ad es. $l = 1$, $L = 3$
$l = 0$ $L = 10$ $[1,3) \subset [0,10]$

$E = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ non è limitato

non superiormente limitato: SIMBOLICAMENTE DICO $\operatorname{Sup} E = +\infty$

$l = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{0 \leq n} \dots$

se fosse $L \in \mathbb{R}$ esiste sicuramente $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > L$

$\operatorname{Inf} E = 0 = \operatorname{MIN} E$ ← Inferiormente limitato

---

$E = \{z \in \mathbb{Z}$ t.c. $z < 0\} = \{z \in \mathbb{Z}$ t.c. $z \leq -1\}$

se fosse $l \in \mathbb{R}$ esiste sicuramente uno $z < 0$ che è $< l$

ma $\forall z \in E$ esiste un L t.c. $z < L$

ad es. $L = 0$

Superiormente limitato

$\operatorname{Sup} E = -1 = \operatorname{MAX} E$
$\operatorname{Inf} E = -\infty$ CONVENZIONALMENTE

$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ è limitato? sì

$= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subseteq [0,1]$.

$\operatorname{Sup} E = 1 = \operatorname{MAX} E$ $\operatorname{Inf} E = 0$ Non è un minimo

ESEMPI su estremi superiori e inferiori

$E = [1,3)$

$E = \mathbb{N}$

$E = \mathbb{Z}$

$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8\}$

TEOR. dell'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE).

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato e non vuoto allora E ammette estremo superiore

questa condizione (ogni s.i. superiormente limitato ha estremo superiore) EQUIVALE alla COMPLETEZZA

Permette di dire che in $\mathbb{R}$ esiste $\sqrt{2}$ e più in generale che

(ESISTENZA DELLE RADICI n-ESIME ARITMETICHE)

$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$ e $\forall n \geq 1$ esiste 1 e 1 sol numero reale positivo x t.c.

$$x^n = y$$

x viene denotato con $\sqrt[n]{y}$

Potenze di un numero reale a: (7

a^n con $a \in \mathbb{R}$, a: BASE n: ESPONENTE.

① caso esponente $n \in \mathbb{N}$. Suppongo per ora $\boxed{a \neq 0}$ e definisco:

$$a^n = \begin{cases} a & \text{se } n=1 \quad : a^1 = a \\ a \cdot a^{n-1} & \text{se } n>1 \quad : a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ ove } a \text{ compare } n \text{ volte} \\ 1 & \text{se } n=0 \quad : a^0 = 1. \end{cases}$$

Quest'ultima definizione si giustifica così:

se n, m sono ≥ 1 vale $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ OVVIO!

se $n=0$ e voglio che valga la stessa legge:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \xRightarrow[\text{semplifico per } a^m \neq 0]{} a^0 = 1$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (ab)^n = a^n b^n}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ n, m \in \mathbb{N} \quad (a^n)^m = a^{nm}}$$

Altre proprietà fondamentali delle potenze a esponenti in $\mathbb{N}$

ERRORE $(2^2)^3 \overset{?}{=} 2^{2^3}$

$\underset{\parallel}{} 4^3 = 64 \neq 2^8 = 256$

---

se $a = 0$? a^n ha significato se $n \neq 0$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n \text{ volte}} = 0$$

NON HA SIGNIFICATO SE $n = 0$

0^0 non ha senso

(8

② a^n, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a^n = \begin{cases} \text{se } n \geq 0 & \text{significa } \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^n = a(a^{n-1}) \end{cases} \\ \text{se } n < 0 & \text{significa } (a^{-1})^{-n} \text{ ove } a^{-1} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

- ho in mente le proprietà

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

: se voglio rappresentare $\frac{1}{a}$ come potenza e continuare ad avere la proprietà:

$$a^0 = 1 = a \cdot \frac{1}{a} = a^1 \cdot a^m = a^{1+m}$$

devo porre $1+m=0$, cioè $\frac{1}{a} = a^{-1}$

- ho anche in mente

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

e infatti definisco (se $n<0$): $a^n = (a^{-1})^{-n}$

$$2^{-5} = (2^{-1})^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

con queste definizioni che tengono conto delle proprietà che valevano nel caso $n \in \mathbb{N}$ – è facile mostrare che:

Per le potenze a esp. intero valgono le 3 propr. chiave date in precedenza:

$$\boxed{\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (ab)^n &= a^n b^n \\ (a^n)^m &= a^{nm} \end{aligned}}$$

$$x^{1/2} = x^{-2/-4} = (x^{-2})^{\frac{1}{-4}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}\right)^{-1} =$$

$\sqrt[4]{x}$ $\Downarrow$ $x \geq 0$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}}$$

x deve essere $\neq 0$

x deve essere > 0

Attenzione

$\sqrt{x}$ è definita per $x \geq 0$ poiché

- se $x = 0$ esiste la soluzione dell'equazione $t^2 = x$ (cioè $t^2 = 0$)

  È $t = 0$.

- se $x > 0$ esiste 1 e 1 sola radice aritmetica seconda di x

  $t^2 = x \Rightarrow$ radice aritmetica: $t = \sqrt{x}$

$\sqrt[3]{x}$ è addirittura definita $\forall x \in \mathbb{R}$ poiché

- se $x = 0$, $t^3 = x$ ha soluzione $t = 0 = \sqrt[3]{0}$
- se $x > 0$, $t^3 = x$ ha per soluzione la radice aritmetica $t = \sqrt[3]{x}$
- se $x < 0$, $t^3 = -x$ ha per soluzione $t = \sqrt[3]{-x}$

  e quindi $-t = -\sqrt[3]{-x}$ è tale che $(-t)^3 = x$

Ma le corrispondenti potenze, $x^{1/2}$, $x^{1/3}$ devono essere considerate definite solo per $x > 0$ per il discorso visto sopra.

Questa distinzione è fondamentale quando (invece della singola potenza razionale positiva, che posso identificare con l'adeguata radice) considero "collezioni" di potenze, come succede nel caso della definizione delle potenze a esponente reale.

③ Potenze con esponente razionale:

$$\sqrt[n]{a} =: a^{1/n} \qquad (a \geq 0 \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

Di qui

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0 \quad \frac{m}{n} > 0)$$

$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Se voglio $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qualsiasi devo chiedere $a > 0$.

---

④ Potenze con esponente reale (base $a > 0$).

Definite "per approssimazione" ...

Es. $2^{\sqrt{2}}$?

PROPRIETÀ

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; $\forall c, d \in \mathbb{R}$:

- $a^0 = 1 \quad \forall a$; $1^c = 1 \quad \forall c$
- $\Rightarrow$ $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$
- $\Rightarrow$ $a^c \cdot b^c = (ab)^c$
- $\Rightarrow$ $(a^c)^d = a^{cd}$
- $a^c > 0$
- se $c > 0$: $a > 1 \Rightarrow a^c > 1$

  $0 < a < 1 \Rightarrow a^c < 1$

  se $c < 0$: si scambia