Potenze con base reale > 0 ed esponente reale (1)

Sia $c = 0{,}101001000100001\ldots\ldots$ (illimitato non periodico)

$2^c = ?$ dotiamo questa scrittura di significato

Osserva che:

c è elemento separatore di due insiemi di numeri razionali, tra loro separati; ad es.

$$A = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}10;\ 0{,}101;\ 0{,}1010;\ 0{,}10100;\ 0{,}101001;\ \ldots\}$$

- $\forall a \in A$, a è tale che $a < c$

$$B = \{1;\ 0{,}2;\ 0{,}11;\ 0{,}102;\ 0{,}1011;\ 0{,}10101;\ 0{,}101002,\ \ldots\}$$

- $\forall b \in B$, b è tale che $c < b$

$\Rightarrow$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ si ha $a < c < b$ e addirittura $c = \operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf} B$.

Allora definisco 2^c come elemento separatore tra le due classi (non vuote e separate):

$$A' = \{2^0;\ 2^{0,1},\ 2^{0,10},\ 2^{0,101},\ 2^{0,1010},\ 2^{0,10100},\ 2^{0,101001},\ \ldots\}$$

$$B' = \{2^1,\ 2^{0,2},\ 2^{0,11},\ 2^{0,102},\ 2^{0,1011},\ 2^{0,10101},\ 2^{0,101002},\ \ldots\}$$

la cui esistenza è garantita dalla COMPLETEZZA e la cui unicità è garantita dal fatto che si dimostra che coincide con $\operatorname{Sup} A'$ (o $\operatorname{Inf} B'$: si dimostra che sono uguali!).

(2)

- $\dfrac{a^c}{a^d} = a^c \cdot \dfrac{1}{a^d} = a^c \cdot a^{-d} = a^{c+(-d)} = a^{c-d}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \left(a \cdot \dfrac{1}{b}\right)^c = (a \cdot b^{-1})^c = a^c (b^{-1})^c = a^c b^{-c} = \dfrac{a^c}{b^c}$
- proprietà che si desumono da quelle algebriche sulle potenze (vedi ultima slide di ieri)

se $c < 0$ e $\boxed{0 \le a \le b}$ VEDI I pag 3 $\Longrightarrow a^{|c|} \le b^{|c|}$

$a^c = a^{-|c|}$ $\qquad b^c = b^{-|c|}$ $\qquad \Downarrow$

$$\frac{1}{b^{|c|}} \le \frac{1}{a^{|c|}}$$

$$\boxed{b^c = b^{-|c|} \le a^{-|c|} = a^c}$$

$2 < \sqrt{7}$ $\qquad c = -3$

$$\frac{1}{2^3} > \frac{1}{7\sqrt{7}}$$

infatti $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad \dfrac{1}{7\sqrt{7}} < \dfrac{1}{7 \cdot 2}$

perché ho diviso per $\sqrt{7} > 2$

Servirà per provare la:

Monotonia delle funzioni "POTENZA"

Se $c < d$ $\quad 0 < a < 1$ $\quad \Longrightarrow \quad a^c > a^d$

Infatti

$$\frac{1}{a} > 1;\ \text{per II pag 3}\ \left(\frac{1}{a}\right)^c < \left(\frac{1}{a}\right)^d \Longleftrightarrow \frac{1}{a^c} < \frac{1}{a^d}$$

$$\Longleftrightarrow a^d < a^c$$

Servirà per provare la:

Monotonia delle funzioni "ESPONENZIALI"

I) se $c>0$: $0<a\le b \Rightarrow a^c \le b^c$ ✱
se $c<0$: $\ge$

II) se $c<d$: $a>1 \Rightarrow a^c<a^d$ ✱
$0<a<1 \Rightarrow a^c>a^d$

VEDI pag 2

vedi pag 2

Esempi.

vedi pag 2.

Risolvere le equazioni:

$x^2=10$; $x^4=-1$; $x^3=-7$

$x^{2/3}=5$; $x^{\sqrt{2}}=4$

Tutte queste sono equazioni del tipo

$$x^c=b$$

e abbiamo visto che: se $b>0$ sono risolubili in $\mathbb{R}$;

se $b<0$ ....

si può risolvere solo se $c\in\mathbb{Z}$, dispari o $c=\frac{1}{n}$ con n dispari, pur di pensare la potenza come radicale: $\sqrt[n]{x}=b \Rightarrow x=b^n$

$x^2=10$ $x=\pm\sqrt{10}$

in generale ogni eq. della forma x^{2n} con $n\in\mathbb{N}$ ammette 2 soluzioni: la radice $(2n)$-esima aritmetica e il suo opposto in quanto elevando a un intero pari il numero diventa ≥ 0 e con = modulo

$x^4=-1$ non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$ poiché ogni potenza intera pari di un numero reale è ≥ 0

$x^3=-7$ esiste 1 e 1 sola soluzione: poiché $t=\sqrt[3]{7}$ è tale che $t^3=7$. Allora $\boxed{x=-\sqrt[3]{7}}$ si ha $x^3=(-\sqrt[3]{7})^3=-7$

La cosa è vera per ogni equaz. del tipo $x^{2n+1}=k\in\mathbb{R}$ $n\in\mathbb{N}$

$x^{2/3}=5$

$\Updownarrow$

$(x^{2/3})^{3/2}=5^{3/2} \iff x^{2/3\cdot 3/2}=5^{3/2} \iff$

$$\boxed{x=5^{3/2}}$$

$x^{\sqrt{2}}=4$

$\Updownarrow$

$(x^{\sqrt{2}})^{1/\sqrt{2}}=4^{1/\sqrt{2}} \iff x^{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2^2)^{1/\sqrt{2}} \iff$

$x=2^{2/\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$

$x^\alpha=\beta$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\beta\in\mathbb{R}$ $\beta>0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=\beta^{1/\alpha}}$

Altro tipo di equazione : $a^x = b$

Se $a = 1$: $\begin{cases} \text{o è identità } 1^x = 1 \\ \text{o è impossibile.} \end{cases}$

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b \leq 0$ ... NON CI SONO SOLUZ

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b > 0$ l'equazione ammette una e una sola soluzione: essa si chiama LOGARITMO in BASE a di b :

$$\log_a b$$

$\boxed{a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^c = c}$

PROPRIETÀ

Sia: $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$ $x > 0, y > 0$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ VERIFICA A LATO
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$ VERIFICA A LATO
- $\log_a (x^c) = c \log_a x$ VERIFICA A LATO
- $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$ VERIFICA A LATO
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$ purché sia $x \neq 1$

$*$ $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$

Devo mostrare che se elevo "a" a $\log_a (xy)$ ottengo lo stesso numero che se elevassi "a" a $\log_a x + \log_a y$

$$a^{\log_a (xy)} = xy$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} \underset{pp.}{=} a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$

$*$ $\boxed{\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y}$ perché ?

$$0 = \log_a 1 = \log_a \left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a y + \log_a \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \log_a 1/y = -\log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

$$\log_a x^c = c \log_a x$$

$$a^{\log_a (x^c)} = x^c$$

$$a^{c \log_a x} = a^{(\log_a x) c} \underset{pp}{=} \left(a^{\log_a x}\right)^c = (x)^c$$

$(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$: Infatti: $a^{\log_a x} = x$

$$a^{(\log_a b)(\log_b x)} = \left(\underbrace{a^{\log_a b}}_{b}\right)^{\log_b x} = x$$

Spiegazioni di conti a pag 4,
cautele sui radicali
e esercizi sulle disequazioni (parte svolte in classe e parte svolte durante il tutoraggio pomeridiano)

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

Chi è $\sqrt{2}$? è quel numero che elevato al quadrato dà 2

$$(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7^3}$$

$$= \sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

$$\sqrt{x(x-1)} \overset{?}{=} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} \quad \text{NO}$$

$\boxed{\text{I.D.: } x(x-1)\geq 0 \iff x\leq 0 \text{ o } x\geq 1}$ $\quad$ $\boxed{\text{I.D. } x\geq 0}$ $\quad$ $\boxed{\text{I.D. } x\geq 1}$ $\quad$ $\boxed{\text{I.D. } x\geq 1}$

$$[x(x-1)]^{1/2} \overset{?}{=} (x)^{1/2}(x-1)^{1/2}$$

$\boxed{\text{I.D. } x(x-1)\geq 0}$ ecc.

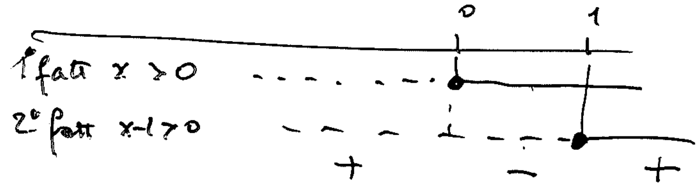
$$\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|x-1|} \quad \text{NO!!}$$

$\boxed{\text{I.D. } \mathbb{R}}$

Corretto:

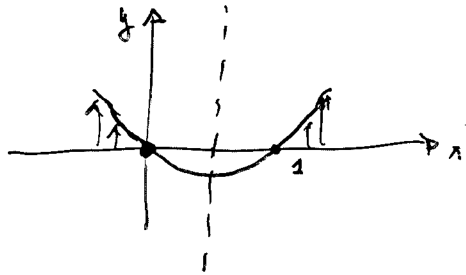
$$\sqrt{x(x-1)} = \begin{cases} \text{se } x\geq 1 & = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} \\ \text{se } x\leq 0 & = \sqrt{-x}\,\sqrt{1-x} \end{cases}$$

$x(x-1)\geq 0$ ho 2 fattori ne calcolo il segno e uso la regola dei segni



$x(x-1)\geq 0$ o per $x\leq 0$ o per $x\geq 1$

$y = x(x-1)$ $\quad$ $y = x^2 - x$ parabola con asse // y di equazione $x = 1/2$ e vertice $(1/2, \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}))$



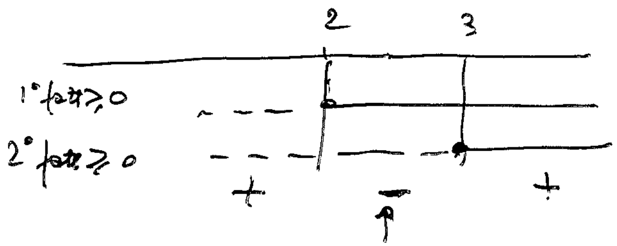
Dove le ordinate dei punti della parabola sono >0 ? esternamente al valore delle radici (perché la parabola è convessa)

$$-x^2+5x-6\geq 0$$

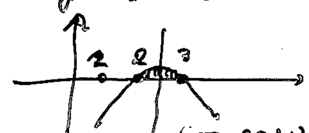
$$-x^2+5x-6=0$$

$$x^2-5x+6=0 \qquad x = 2, 3$$

$$-(x-2)(x-3)\geq 0 \iff (x-2)(x-3)\leq 0 \iff 2\leq x\leq 3$$



$y = -(x-2)(x-3)$



concava.

2.2 es 5

$$|2x-6| > 4$$

$$|2x-6| = |2(x-3)| = |2|\,|x-3| = 2\,|x-3|$$

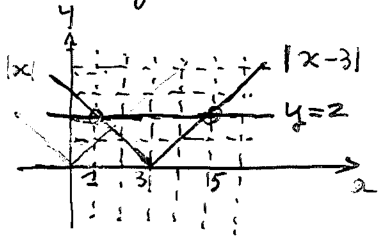
$$\Updownarrow$$

$$2\,|x-3| > 4$$

$$\Updownarrow$$

$$|x-3| > 2$$

Geometricam.



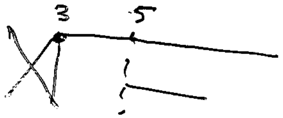
Algebricamente

$$|x-3| = \begin{cases} \text{se } x-3 \geq 0 & |x-3| = x-3 \\ \text{se } x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \end{cases}$$

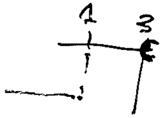
quindi devo unire le soluzioni dei 2 sistemi

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3 > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 3 \\ 3-x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x > 5 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases}$$



sol. $x > 5$

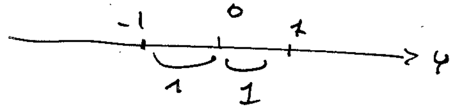


sol $x < 1$

Soluzioni:

$$\Rightarrow (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

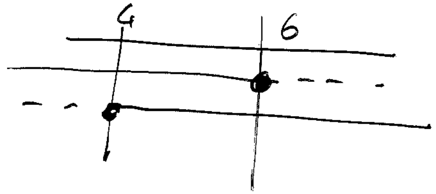
$$|x-5| \leq 1$$



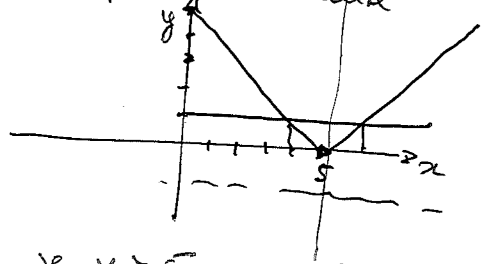
$$\Updownarrow$$

$$-1 \leq x-5 \leq 1 \iff 4 \leq x \leq 6$$

$$x-5 \leq 1$$



Geometricamente



se $x \geq 5$: $x-5 \leq 1$

se $x < 5$: $5-x \leq 1$

$$|x-5| \leq -1 \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

$$|x^3-x| \leq 0 \iff x^3-x=0 \iff x(x-1)(x+1)=0$$

$\iff x=0$ oppure $x=1$ oppure $x=-1$

$$|x^2-1| + |x^2-5| \geq 0$$ sempre > 0

Infatti

$|x^2-1| \geq 0 \quad \forall x$

$|x^2-5| \geq 0 \quad \forall x$

Si annulla $= 0$?

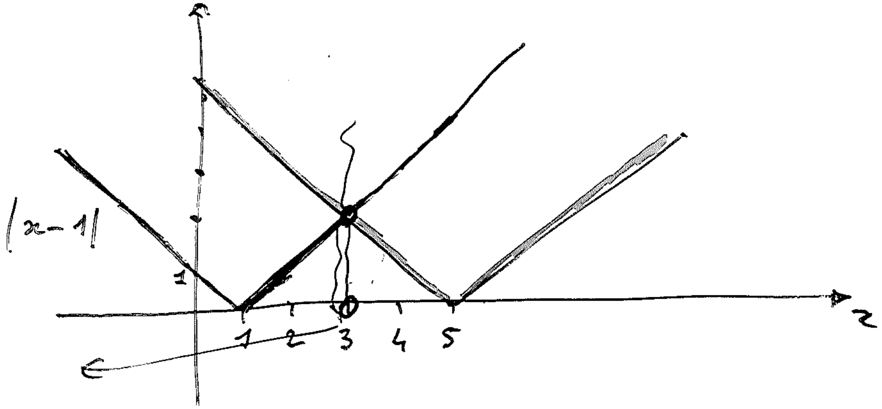
Mai: se $x^2-1=0 \Rightarrow |x^2-5| = |-4| = 4$

se $x^2-5=0 \Rightarrow x^2-1 = 4$

$$\frac{|x-1|}{|5-x|} \leq 1 \iff \begin{cases} x \neq 5 \\ |x-1| \leq |x-5| \end{cases}$$

%

(11)



Ci sono 3 casi

$x < 1$: $1-x \le 5-x \iff 1 \le 5$ SEMPRE!

$1 \le x \le 5$: $x-1 \le 5-x \iff 2x \le 6$ per $x \le 3$

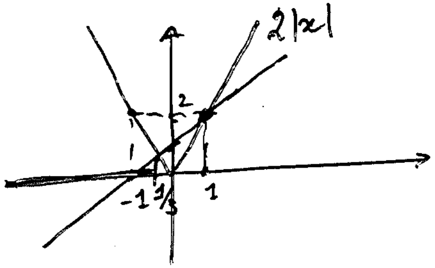
$x > 5$: $x-1 \le x-5 \iff -1 \le -5$ MAI

Soluzioni:

$(-\infty, 1) \cup [1,3] = (-\infty, -3]$

$|x-1| < |x+1|$ fare per esercizio!

$x+4 - 2|x| < 3 \iff x+1 < 2|x|$



$\begin{cases} x+1 < -2x \\ x < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -1/3 \\ x < 0 \end{cases}$: $(-\infty, -1/3)$

$\cup$

$\begin{cases} x+1 < 2x \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$: $(1, +\infty)$

Soluzioni:

$(-\infty, -1/3) \cup (1, +\infty)$

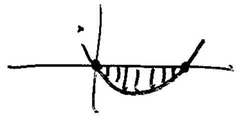
(12)

$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{1}{3}\right)(x+1) \le 6x + \frac{7}{12}$

$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} - 2x^2 - 2x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \le 6x + \frac{7}{12}$

$2x^2 + \left(-10 + \frac{1}{3}\right)x \le 0$

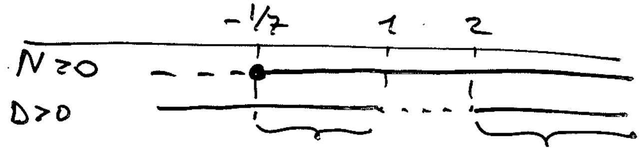
$x\left(2x - \frac{29}{3}\right) \le 0$



Sol: $0 \le x \le \frac{29}{6}$

$\frac{7x+1}{x^2-3x+2} \ge 0$ Num ≥ 0 $x \ge -1/7$

Den > 0 $x < 1$ oppure $x > 2$

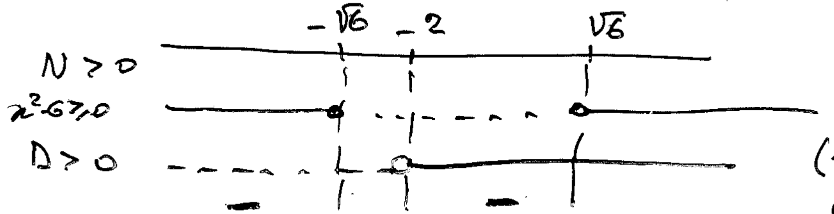


per $-1/7 \le x < 1$ oppure per $x > 2$

Sol: $[-1/7, 1) \cup (2, +\infty)$

$\frac{x}{x+2} \le 3-x \iff \frac{x}{x+2} + x - 3 \le 0 \iff$

$\frac{x + (x-3)(x+2)}{x+2} \le 0 \iff \frac{x^2 - 6}{x+2} \le 0$

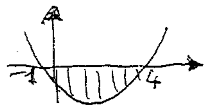


Sol.:

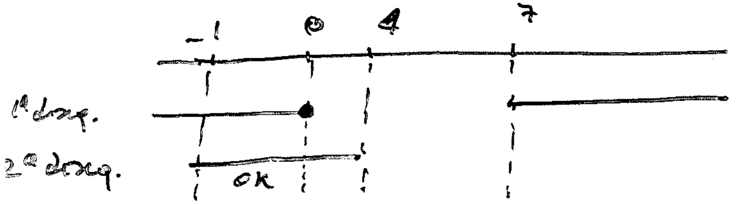
$(-\infty, -\sqrt{6}) \cup$

$\cup (-2, \sqrt{6})$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-7} \geq 0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \qquad (x+1)(x-4)<0$$



$$\begin{cases} 1^a \text{ diseq: } & x \leq 0 \text{ oppure } x>7 \\ 2^a \text{ diseq: } & -1<x<4 \end{cases}$$



Sol. del sistema $-1<x\leq 0$, cioè $(-1,0]$

per svolgere l'esercizio graficamente pensare che:

$$\frac{x}{x-7} = \frac{x-7+7}{x-7} = 1+\frac{7}{x-7}$$

$$\begin{cases} x^2+11x+24\leq 0 \\ 9-x^2\geq 0 \end{cases}$$

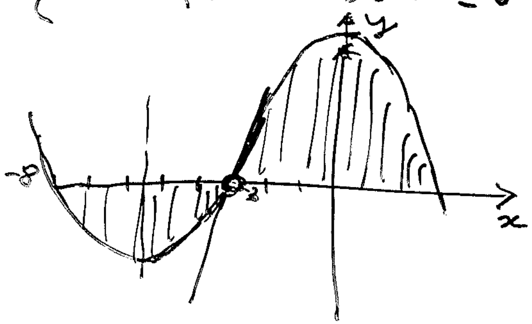
$x^2+11x+24=0 \qquad x=\dfrac{-11\pm\sqrt{25}}{2}$

$x = \begin{cases} -3 \\ -8 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1^a \text{ diseq: } & -8\leq x\leq -3 \\ 2^a \text{ diseq: } & -3\leq x\leq 3 \end{cases}$$

Soluzioni del sistema:

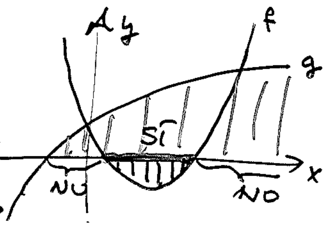
$[-8,-3]\cap[-3,3]=\{-3\}$



in generale

$\begin{cases} f<0 \\ g>0 \end{cases}$

guardo in quali intervalli si realizzano entrambe le condizioni



2.5 1)

$$\sqrt{|x|} > x-1$$

$|x|\geq 0$ sì $\forall \mathbb{R}$

1° caso:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ \sqrt{|x|}\geq 0 > x-1 : \text{SEMPRE} \end{cases}$$

$(-\infty,1)$.

$$\boxed{0<a<b \Rightarrow \begin{matrix} aa<ab \\ ab<bb \end{matrix} \Rightarrow a^2<b^2}$$

2° caso:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ |x|>(x-1)^2 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x\geq 1 \Rightarrow |x|=x \\ x>x^2-2x+1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

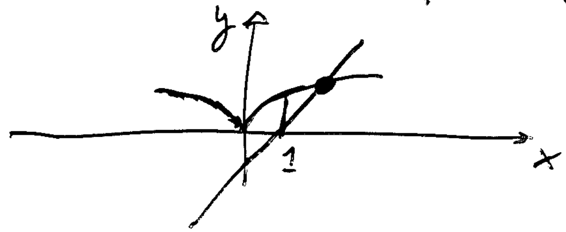
$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-3x+1<0 \end{cases} \qquad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad 1\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{1\leq x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Soluz della disequ. è $\left(-\infty,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$



posso interpretarlo graficamente così