$|x^2-1| + |x^2-5| \geq 0$ per def. di val. assoluto

so: $|x^2-1| \geq 0$ ed è $=0$ per $x=\pm 1$

$|x^2-5| \geq 0$ ed è $=0$ per $x=\pm\sqrt{5}$

La somma di 2 quantità ≥ 0 è ≥ 0 per le proprietà di compatibilità

se $a \geq 0$: $a+b \geq 0+b=b$

se $b \geq 0$ $a+b \geq 0$ | per propr. trans.

$\Rightarrow |x^2-1| + |x^2-5| \geq 0$; può essere $=0$?

No poiché se $|x^2-1|=0$ allora $|x^2-5|>0$

se $|x^2-5|=0$ allora $|x^2-1|>0$

$\Rightarrow$ (se $a>0$, $b\geq 0$ allora $a+b>0$) $\Rightarrow$ Somma ≥ 0.

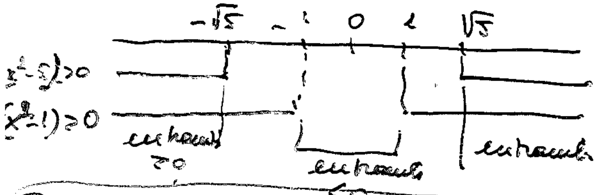
~~Invece:~~ $\boxed{(-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},+\infty) \text{ Soluzione di}}$

$|x^2-1| - |x^2-5| \geq 0 \iff |x^2-1| \geq |x^2-5|$

Algebricamente. Mi chiedo il segno degli argomenti dei VALORI ASSOLUTI:

$x^2-1>0 \iff x<-1$ oppure $x>1$

$x^2-5>0 \iff x<-\sqrt{5}$ oppure $x \geq \sqrt{5}$



se $\begin{bmatrix} x\leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{bmatrix}$ $x^2-1 \geq x^2-5$ SEMPRE.

se $\boxed{\begin{matrix} -\sqrt{5}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{5} \end{matrix}}$ $x^2-1 \geq 5-x^2 \Rightarrow x^2 \geq 3$ (*)

se $-1 \leq x \leq 1$ $1-x^2 \geq 5-x^2$ MAI

Quindi:

(*) $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ oppure $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

FUNZIONI NUMERICHE (REALI DI VARIABILE REALE)

Esempi

- spostamento di un grave lasciato cadere (da una altezza h) in dipendenza del tempo:

$$s(t)=\frac{1}{2} g t^2$$

- Volume di una sfera in dipendenza del suo raggio

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

- Trasformazione isoterma (di una mole di gas ideale)

$$p(V)=RT\cdot\frac{1}{V}$$

(p = pressione, V: volume, T = Temperatura assoluta: costante, $R = 1.986$ cal/grado)

<u>Elementi essenziali</u>:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una legge f che a <u>ogni</u> elemento x dell'insieme di partenza ne associa <u>1 e 1 solo</u> y nell'insieme di arrivo (UNIVOCITÀ)

Queste tre cose definiscono una FUNZIONE.

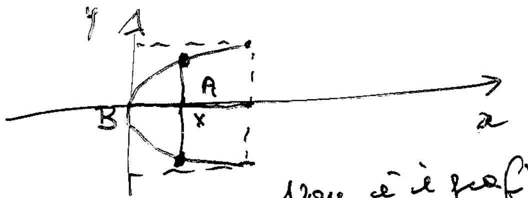
SIMBOLI $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ / $f(x)=y$

f: legge univoca

A: insieme di definizione (... DOMINIO)

$f(A)=\{y \in B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\exists x \in A$ per cui $f(x)=y\}$: IMMAGINE di f

GRAFICO di f: $G(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.c. $x \in A$ e $y=f(x)\}$

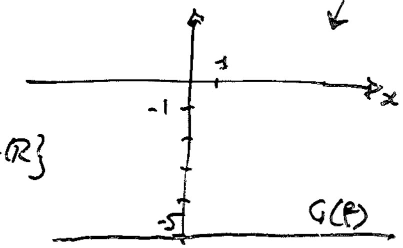


Non è il grafico di una funzione
la legge non è univoca!

$f(x) = -5$ $\quad$ I.D. $= \mathbb{R} = A$

$f(A) = \{-5\}$

$G(f) = \{(x, -5),\ x \in \mathbb{R}\}$

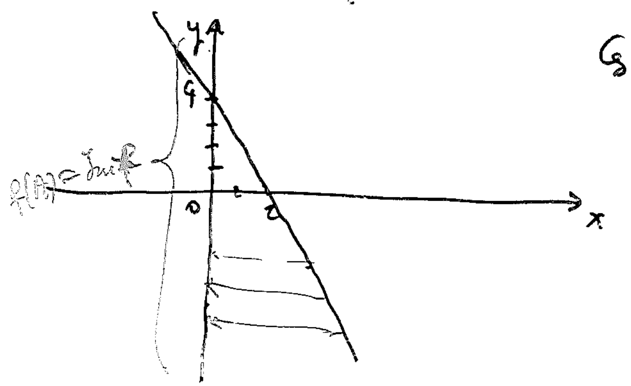


$f(x) = 4 - 2x$ $\quad$ I.D. $= \mathbb{R} = A$

$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}$ per cui $y = 4 - 2x \}$

lo penso fissato $y = \bar{y}$
e cerco x t.c. $\bar{y} = 4 - 2x$
cioè $x = \dfrac{4 - \bar{y}}{2}$: ~~la~~ soluz. esiste $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$



$G(f) = \{(x, f(x)) \mid f(x) = 4 - 2x\}$

$y = 4 - 2x$
rappresenta una retta

$x = 0 \Rightarrow y = 4$
$y = 0 \Rightarrow x = 2$

ESEMPI

1. $f(x) = -5$ $\quad$ ins. di def. $A =$
immagine $f(A) =$
grafico

2. $f(x) = 4 - 2x$ $\quad$ $A = \mathbb{R}$ $\quad$ $f(A) =$
grafico

x	0	2
$f(x)$		

VEDERE LE DUE PAGINE SUCCESSIVE

3. $f(x) = x^2$ $\quad$ $A =$ $\quad$ $f(A) =$
grafico

x	0	1/2	1	3/2	2
$f(x)$					

e $f(x) = -x^2$?

4. $f(x) = \frac{1}{4} x^2$ $\quad$ $A =$ $\quad$ $f(A) =$
grafico

x	0	1/2	1	3/2	2	3
$f(x)$						

$f(x) = 2x^2$?

5. $f(x) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{3}{4}$ $\quad$ $A =$ $\quad$ $f(A) =$

$= \frac{1}{4} (\qquad\qquad)$

$= \frac{1}{4} (\qquad)^2 - 1$ $\quad$ VEDI SOL. EQ. DI 2° GRADO

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

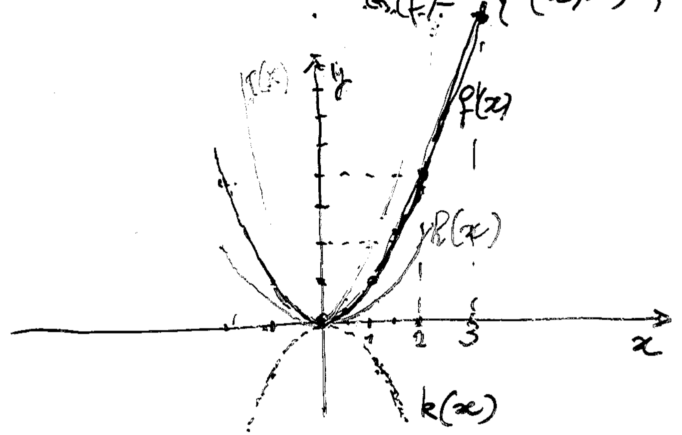
ANCORA PIÙ SEMPLICE : $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 3$
ASSE DELLA PARABOLA : $x = \frac{-1+3}{2}$
VERTICE : $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, -1) \ \ldots$

RELAZIONE CON LA RISOLUZ. DI DISEQ. DI 2° GRADO

$f(x) = x^2$ $\qquad$ I.D. $= \mathbb{R} = A$

$f(A) = [0,+\infty)$ poiché $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

$G(f) = \{(x,x^2),\ x\in\mathbb{R}\}$



$f(x) = f(-x)$ perché $(-x)^2 = x^2$

incomincio a tracciare il grafico per $x \geq 0$ e poi simmetrizzo rispetto all'asse y

x	$f(x) = x^2$	
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18
1/2	1/4	1/2
3/2	9/4	9/2

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$k(x) = -x^2$

I.D. $= \mathbb{R} = A$

$k(A) = (-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ $\qquad$ I.D. $= \mathbb{R} = A$

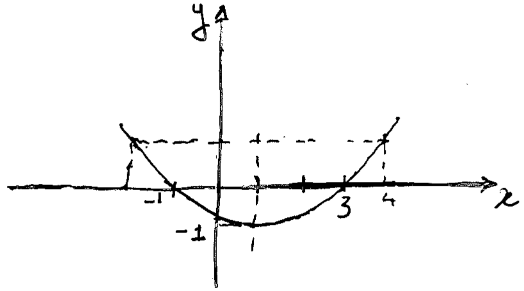
$f(A)$?

$G(f)$ è una parabola convessa perché il coef. di x^2 è >0.

Traccio il grafico.

$f(x)$ ha degli zeri? Cioè esistono $x\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)=0$?

$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x_1 = -1,\ x_2 = 3$



Quindi $G(f)$ contiene i punti $(-1,0)$, $(3,0)$. Il grafico è una parabola che ha asse di simmetria $x = 1$

$\Rightarrow$ $V = \left(1, \frac{1}{4}(1-2-3)\right) = (1,-1)$

$f(x) \geq$ ordinata del vertice $= -1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(A) = [-1, +\infty)$

6. $f(x) = x^3$ $\quad A=$ $\quad f(A)=$ $\longrightarrow$

$f(x) = x^{2K+1}$ con $K \in \mathbb{N}$

FUNZIONI DISPARI
PARI
Loro simmetrie?

ESEMPI (VEDERE PAG SUCC.)

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = 3x^4 - |x|$
- $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$
  - $f(x) = |x-1|$
- $f(x) = 4x^3 - x$ $\quad$ (min. $(1/\sqrt{12}, -2/3\sqrt{12})$)
  - $f(x) = 4x^3 - x + 1$
  - $f(x) = (x-1)^3$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = x^3$ $\qquad$ I.D. $= \mathbb{R} = A$

$f(A)$?

$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \bar{y}$? cioè

$x^3 = \bar{y}$?

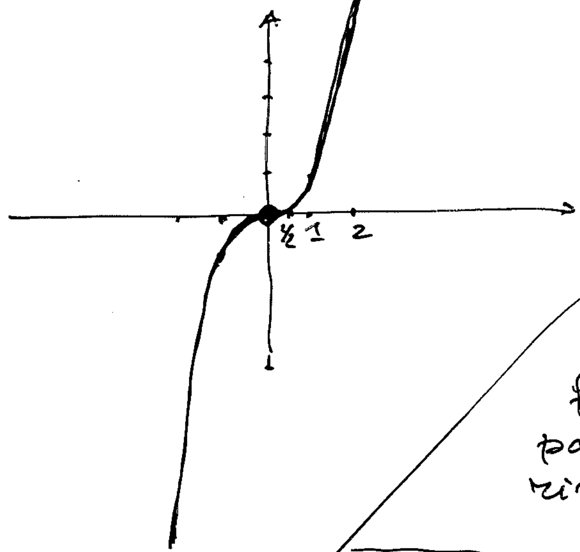
se $\bar{y} \geq 0$ $\quad x = \sqrt[3]{\bar{y}}$ ← radice aritmetica

se $\bar{y} < 0$ $\quad x = -\sqrt[3]{-\bar{y}} := \sqrt[3]{\bar{y}}$ ← radice algebrica

$\Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

traccio il grafico per $x \geq 0$ e poi simmetrizzo rispetto a $(0,0)$



funzioni PARI

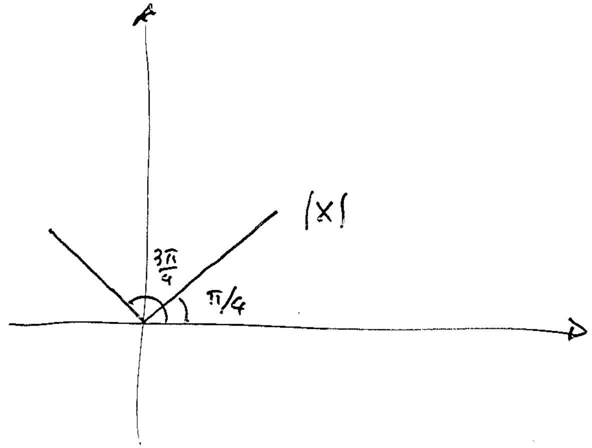
$f: A \to \mathbb{R}$ si dice pari se $\forall x \in A$ risulta

$f(x) = f(-x)$

Quindi il prerequisito per parlare di funzione pari (o dispari) è che il dominio A sia simmetrico rispetto a $x=0$

funzioni DISPARI

$f: A \to \mathbb{R}$ si dice dispari se $\forall x \in A$ risulta $f(x) = -f(-x)$



$f(x) = |x|$ $\quad$ I.D. $= \mathbb{R}$

se $x \geq 0$: $|x| = x$
$\quad\;\; x < 0$: $|x| = -x$

è pari

$f(x) = 3x^4 - |x|$ $\quad$ I.D. $= \mathbb{R}$

$f(-x) = 3(-x)^4 - |-x| = 3x^4 - |x| = f(x)$

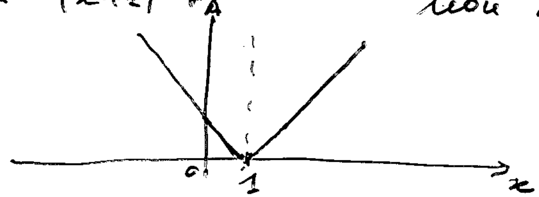
pari

Più in generale la somma algebrica di funzioni pari è una funz pari

Anche $f(x) = 3x^4 + 1$ è pari

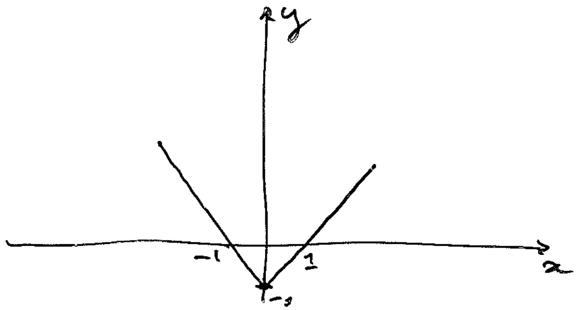
$f(x) = |x-1|$ $\quad$ I.D. $= \mathbb{R}$

$f(-x) = |-x-1| \neq f(x)$ $\quad$ non pari
$\quad = |x+1|$ $\quad$ non dispari



il grafico è simmetrico rispetto a $x=1$

$f(x) = |x| - 1$ $\quad$ è pari? Sì



La somma alg. di funz. dispari è dispari:

$f(x) = 4x^3 - x$

$f(-x) = 4(-x)^3 - (-x) = -4x^3 + x = -(4x^3 - x) =$
$= -f(x)$ $\quad$ è dispari

$f(x) = 4x^3 + 1$ $\quad$ è dispari?

avendo traslato di 1 unità nella direz e verso dell'asse y il grafico di $4x^3$ (che è dispari) ci siamo giocati l'essere dispari!

$f(-x) = -4x^3 + 1 \neq -(4x^3 + 1)$

Ogni funzione dispari, se è definita per x in $x=0$ vale 0.

$f(x) = 1/x$ $\quad$ I.D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: simmetrico rispetto a $x=0$

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ dispari

$f: A \to \mathbb{R}$ A simmetrico rispetto a $x=0$ (11)

$g: A \to \mathbb{R}$

Se f è pari e g è dispari allora (fg) è dispari

[NB: $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$]

$\forall x \in A: \quad f(x) = f(-x)$

$\forall x \in A: \quad -g(x) = g(-x)$

$\forall x \in A \quad f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\,(-g(x)) =$

$= -[f(x)\,g(x)]$

Se entrambe f e g sono pari il prodotto è pari, se entrambe sono dispari il prodotto è pari

FUNZIONI MÓNOTÓNE dove? su un intervallo:

$[a,b]$ o (a,b) o $[a,b)$ o $(a,b]$ o

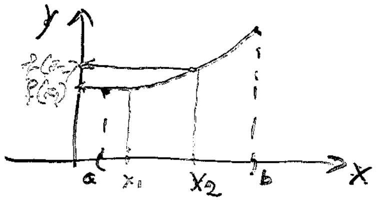
$(-\infty,b)$ ... $(a,+\infty)$ ...

NON SU UNIONE DI INTERVALLI

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è monotona crescente (strettamente)

se $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ risulta

$f(x_1) < f(x_2)$



da sinistra a destra grafico "in salita"

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è monotona decrescente (strettamente)

se $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ risulta

$f(x_1) > f(x_2)$

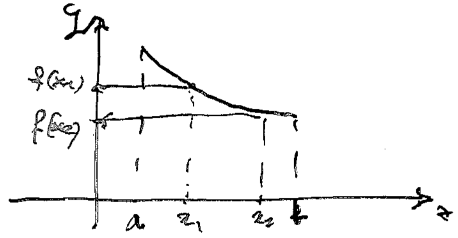
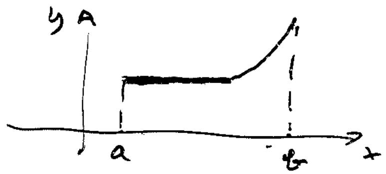


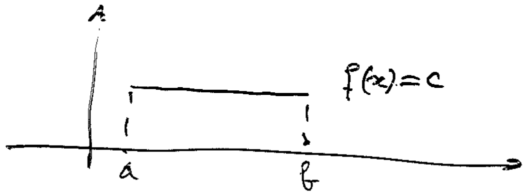
grafico "in discesa"

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è non decrescente

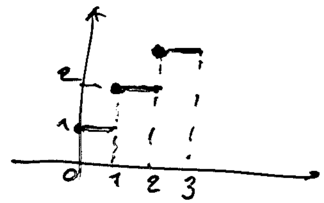
se $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ risulta

$f(x_1) \le f(x_2)$





$f(x) = c$



monotona non decrescente

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è non crescente

se $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ risulta

$f(x_1) \ge f(x_2)$