Esercizi da fare tra oggi e domani pomeriggio

2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.13
2.14 $\quad | \,|, \sqrt{\ }, \exp, \log.$

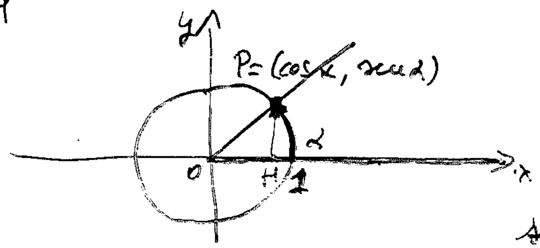
avete già gli strumenti

2.10 : li vediamo oggi (TRIGON.)

Da 1.11 a 1.21 : avete già gli strumenti | L.B.

Da 1.22 a 1.31 : li costruiamo tra oggi e domani
composizione e inversione

VISTO IERI



$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\overline{OP}}$ è un puro numero

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overrightarrow{HP}}{\overline{OP}}$

$|\operatorname{sen}\alpha| \le 1 \qquad |\cos\alpha| \le 1 \qquad (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{sen}(\alpha - 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$

e in generale:
$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

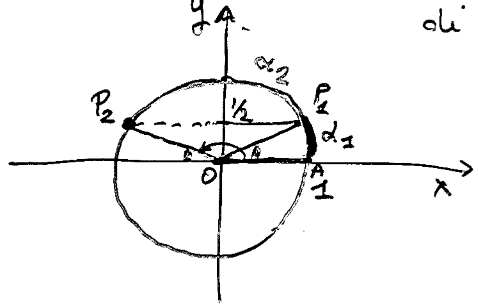
$\cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

la funzione $\operatorname{sen} x$ è periodica <u>di periodo 2π</u>
$\cos x$ " "

Ciò significa che la funzione $\operatorname{sen} x$ assume gli stessi valori in x e in $x+2\pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$
e non esiste alcun numero $\beta > 0$ t.c.

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+\beta) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Attenzione: è vero che ci sono almeno due valori di $\alpha \in (-\pi, \pi]$ tali che:



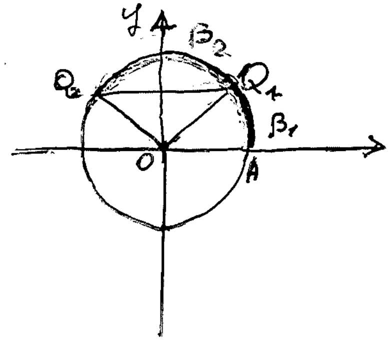
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\alpha = \alpha_1 = \pi/6}$

$\boxed{\alpha = \alpha_2 = \pi - \pi/6 = \dfrac{5\pi}{6}}$

Sono soluzioni entrambi e
$\alpha_2 - \alpha_1 = \beta < 2\pi$
$= \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$

Ma se prendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



sono soluzioni:
$x = \beta_1 = \dfrac{\pi}{4}$
$x = \beta_2 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

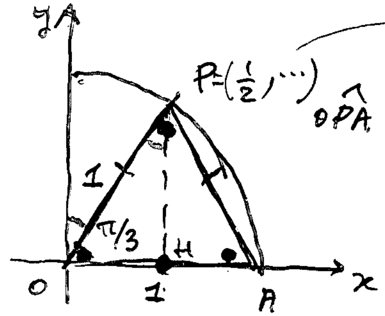
e $\underbrace{\beta_2 - \beta_1}_{\parallel} \neq \beta$

$\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

cioè non è vero che per ogni x: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + \frac{2\pi}{3})$
(anche se la cosa è vera per $x = \pi/6$).
COME HO FATTO A TROVARE LE SOLUZIONI? A RITROSO:

Considero

①



$$\widehat{OPA} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

⇒ OPA è un triangolo equilatero

$H = (1/2, 0)$

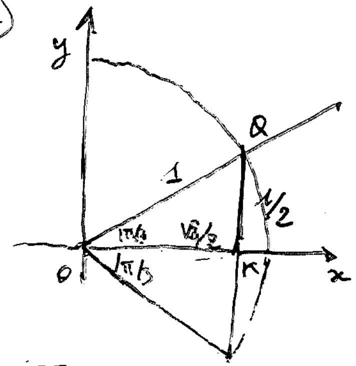
$$\overline{PH}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

---

②



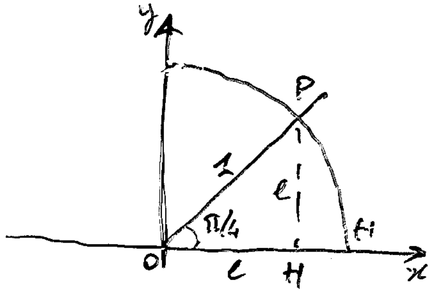
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Simmetrizzo rispetto all'asse x: ho una figura ruotata rispetto alla precedente... stessi conti

---

③



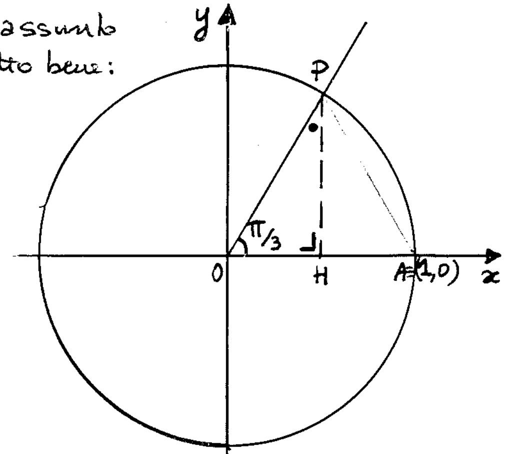
$$\ell^2 + \ell^2 = 1$$

$$2\ell^2 = 1 \quad \begin{cases} \ell^2 = \frac{1}{2} \\ \ell > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

② Riassunto fatto bene:



$\overset{\triangle}{OPA}$ isoscele con vertice O (lati uguali)

⇒ equilatero

⇒ se $\overline{OP} = 1$ allora

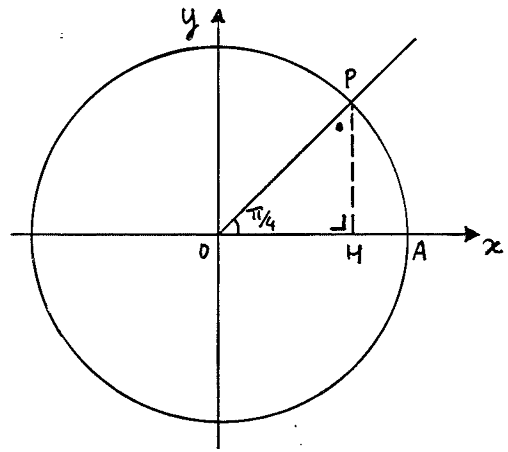
$\overline{OH} = 1/2$

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{1 - 1/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = 1/2 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \sqrt{3}/2 = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \sqrt{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$$



$\overset{\triangle}{OHP}$ isoscele con vertice H (angoli uguali)

⇒ OH = PH e

$\overline{OP}^2 = 2\,\overline{OH}^2$

$$\Rightarrow \overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$: FORMULE DI ADDIZIONE ⇒

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

$\pi/8 = \frac{1}{2}\cdot\pi/4$: FORMULE DI BISEZIONE ⇒

$$\cos\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen}\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

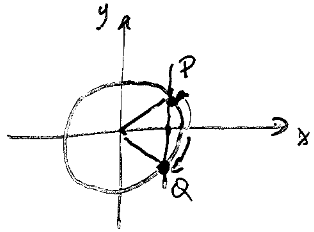
$$\operatorname{tg}\pi/8 = \sqrt{2} - 1$$

Come risolvo:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \;?\qquad \text{so che } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ è una soluzione. Ma anche

$x = -\frac{\pi}{6}$ lo è



poiché il punto Q simmetrico di P rispetto all'asse x ha la stessa ascissa di P.

Avrei anche potuto dire che è sol. $x = \frac{11}{6}\pi$! Infatti

visto che sen x e cos x sono funzioni periodiche, equazioni del tipo

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Non hanno solo 2 soluzioni, ne hanno infinite:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{ove } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 5\pi/6 + 2k\pi \quad \text{ove } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{ove } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\pi/6 + 2k\pi \quad \text{ove } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Allo stesso modo risolvo

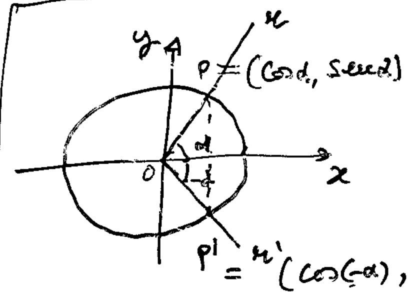
$$\operatorname{Sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ecc.}$$

③

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ — dispari

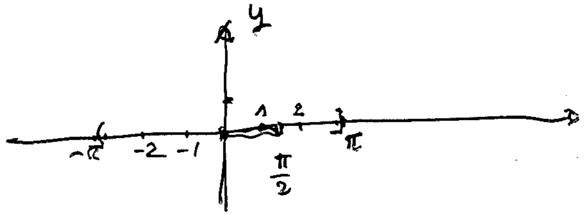
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ — pari

poiché:



r' simmetrica di r rispetto all'asse x

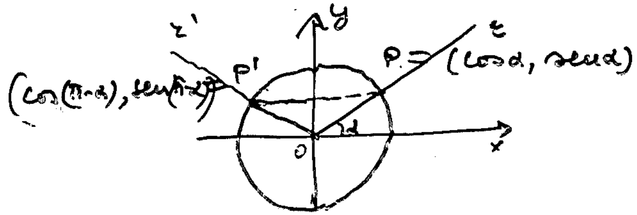
P e P' hanno ugual ascissa e ordinata di ugual modulo e segno opposto



Tenuto conto del periodo (2π) fissiamo l'attenzione sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, ampio 2π e simmetrico rispetto all'origine!

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$?

$\cos(\pi - \alpha)$?



r' simmetrica di r rispetto all'asse y

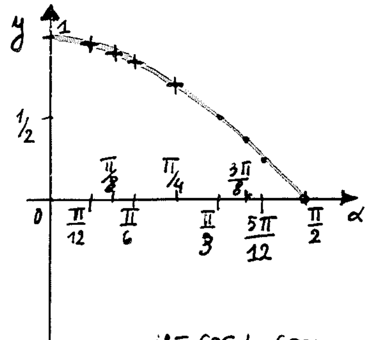
$\widehat{xr'} = \pi - \alpha$

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

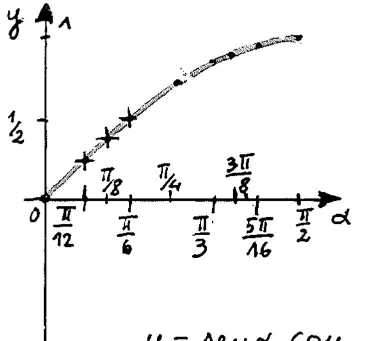
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

poiché P e P' hanno ugual ordinata e ascissa di ugual modulo e segno opposto.

Basta descrivere i grafici di sen α e cos α nell'intervallo tra 0 e $\pi/2$



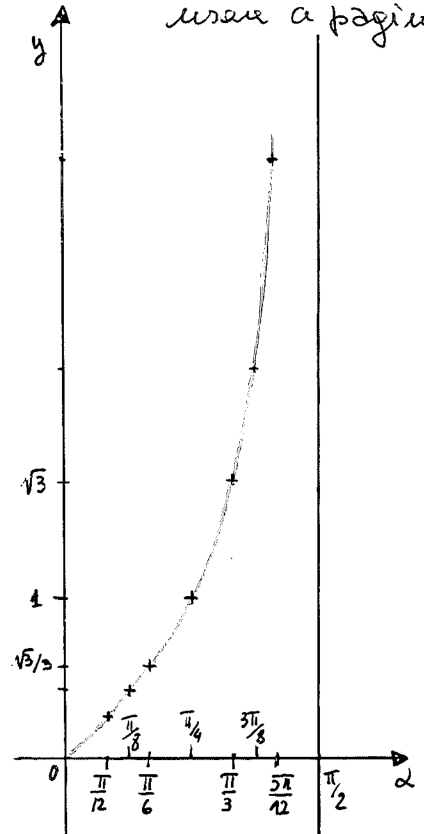
$y = \cos\alpha$ con $0 \le \alpha \le \pi/2$



$y = \operatorname{sen}\alpha$ con $0 \le \alpha \le \pi/2$

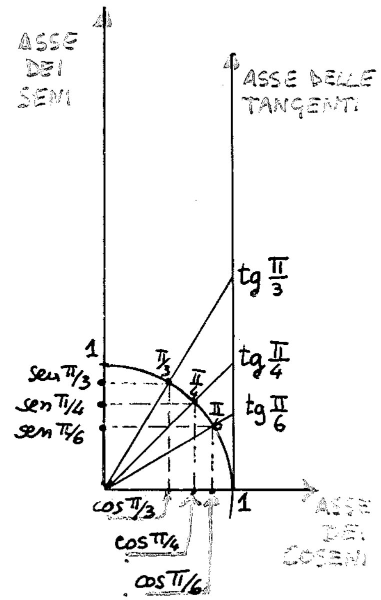
Note le relazioni tra seno e coseno di angoli complementari basta ricavare 4+3 valori per avere il grafico con il dettaglio proposto

usare a pagina 5

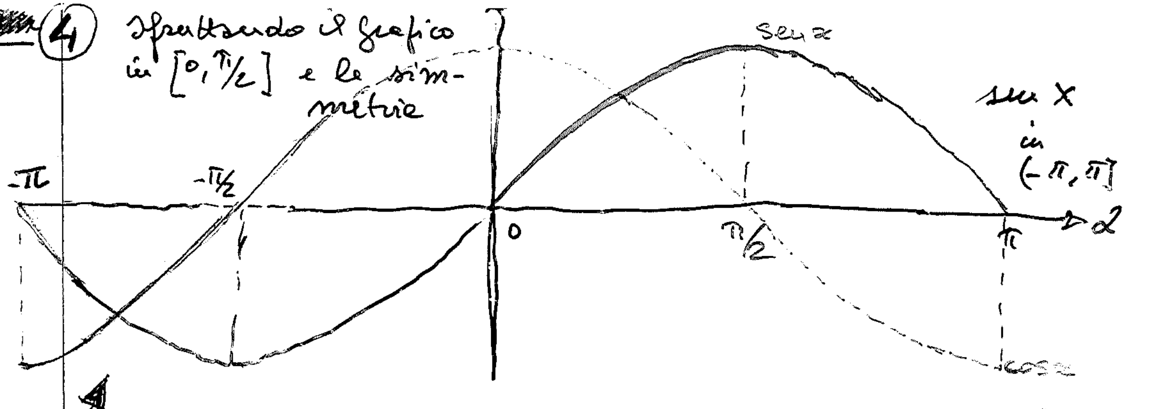


$y = \operatorname{tg}\alpha$ con $0 \le \alpha < \pi/2$

Metodo grafico (senza calcoli) per trovare $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ noto α (sempre $0<\alpha<\pi/2$)



4 Sfruttando il grafico in $[0, \pi/2]$ e le simmetrie



$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$ $\operatorname{sen}\alpha$ è simmetrico risp. a $\alpha = \pi/2$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad [\cos(-\alpha) = \cos\alpha]$

Ancora: $\operatorname{sen}(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$ (il grafico di coseno è traslato di quello di seno di $\pi/2$ in direzione asse x e verso opposto)

FORMULE di ADDIZIONE

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

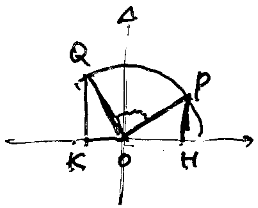
Quindi

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = \operatorname{sen}\alpha\cos\pi + \cos\alpha\operatorname{sen}\pi = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha\cos\pi/2 - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\pi/2 = -\operatorname{sen}\alpha$$



$\overline{OK} = \overline{PH}$
$\overline{QK} = \overline{OH}$

Commento alle formule su $\text{sen}(\alpha+\pi/2)$ e $\cos(\alpha+\pi/2)$

Formule di duplicazione

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

se $\beta=\alpha$

$$\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\text{sen}\,\alpha)^2 =$$

$\boxed{(\text{sen}\,\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1} \longrightarrow$

$$= (\cos\alpha)^2 - [1-(\cos\alpha)^2] = 2(\cos\alpha)^2 - 1.$$

oppure

$$= 1-(\text{sen}\,\alpha)^2 - (\text{sen}\,\alpha)^2 = 1 - 2(\text{sen}\,\alpha)^2.$$

(Formule di bisezione)

$$\frac{2}{2}(\cos\alpha)^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\frac{2}{2}(\text{sen}\,\alpha)^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

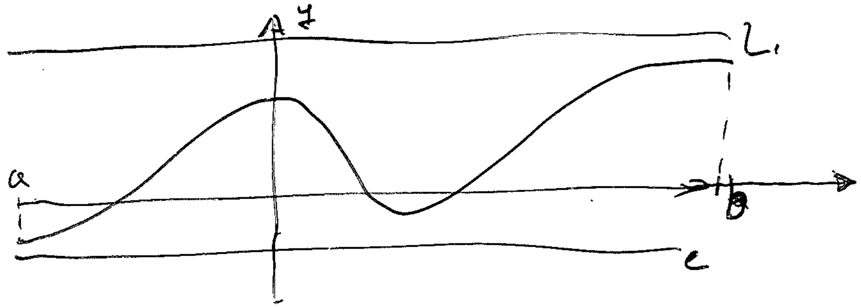
da usare solo per la determinazione del seno e coseno di un angolo noto

Def. dico che $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ (l'interv. può essere anche chiuso o illimitato)

è una funzione limitata su (a,b) se la sua immagine è limitata

cioè $\forall x\in(\alpha,\beta)$ esistono $l, L\in\mathbb{R}$ t.c.

$$l \le f(x) \le L$$



$\text{sen}\,x$ e $\cos x$ sono limitate con $l=-1$ e $L=1$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ I.D. $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

è <u>dispari</u> $\text{tg}(-\alpha) = \dfrac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos\alpha} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$

è <u>periodica</u>

$$\text{tg}(\alpha+2\pi) = \frac{\text{sen}(\alpha+2\pi)}{\cos(\alpha+2\pi)} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

Sì, ma di <u>periodo π</u> (NON 2π)

Infatti $\text{tg}(\alpha+\pi) = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

<u>Non</u> è una funzione <u>limitata</u>