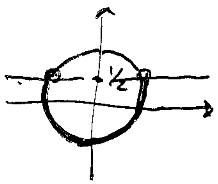
(1)

$2\,\text{sen}\,x < 1 \iff \text{sen}\,x < \frac{1}{2}$



$\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ ha tra le sue soluzioni

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$= -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

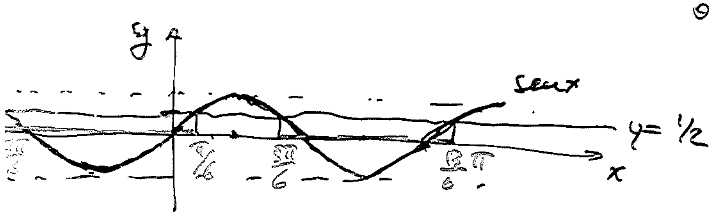
$-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$ è un intervallo di soluzioni

e quindi (per la periodicità) $-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Cioè le soluzioni sono costituite dall'insieme

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi\,,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

Oppure lavorando sul grafico di sen x:

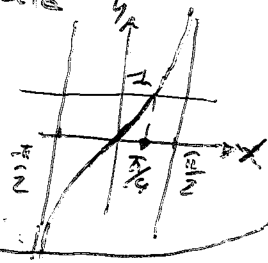


$\text{tg}\,x > 1$ — tg x è monotona crescente in ciascuno degli intervalli in cui è definita

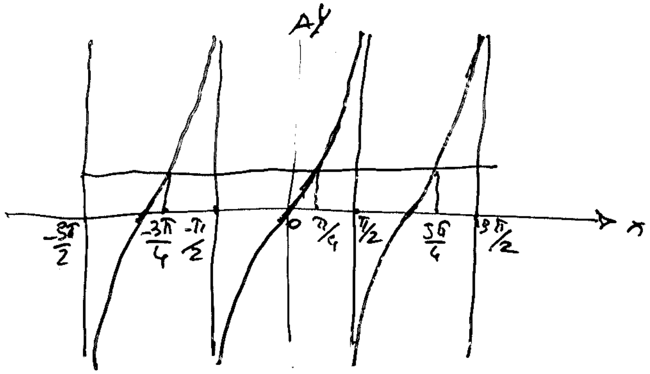
se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$?

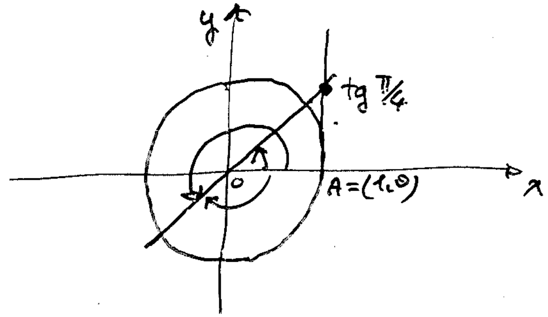
$\text{tg}\,x = 1$ per $x = \pi/4$

$\Rightarrow$ in $(-\pi/2, \pi/2)$ la disug. è verificata dall'intervallo $(\pi/4, \pi/2)$



(2)





In generale la soluzione di $\text{tg}\,x > 1$ è data dall'insieme

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

VEDERE I GRAFICI SOPRASTANTI !!

COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI

VEDI ESEMPI 8 - 11 BIS

$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

$g: B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \circ f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Se $C \neq A$, $f \circ g$ è un NONSENSO

Se $C = A$ può essere $f \circ g \neq g \circ f$

esempi

ESEMPIO: $f(x) = |x| \qquad g(x) = x+1$

Se $C = A$ e $\begin{cases} g \circ f(x) = x & \forall x \in A \\ f \circ g(y) = y & \forall y \in B \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Si dice che f è invertibile e che g è la sua inversa.
(NOTAZIONE: $g =: f^{-1}$) VEDI pag 7

ESEMPI

$f(x) = x^2$, $A = [0, +\infty)$ $B =$ $\qquad$; $f^{-1}(y) =$

$\qquad A = (-\infty, 0)$ $B =$ $\qquad$; $f^{-1}(y) =$

$f(x) = x^2$ $\qquad$ Vedi pag 10

$f(x) = x^2 \qquad A = \mathbb{R} \quad B = [0, +\infty)$

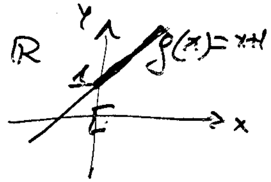
$g(x) = 1 \qquad B = [0, +\infty) \quad C = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(x^2) = 1 \qquad A = \mathbb{R} \qquad Im(g \circ f) = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \qquad A = \mathbb{R} \qquad B = [0, +\infty)$

$g(x) = x + 1 \qquad \bar{B} = \mathbb{R} \supseteq B \qquad C = \mathbb{R}$

$g_{|B}: B \to [1, +\infty)$



Componiamo

$g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1 \qquad A = \mathbb{R}, \quad C = [1, +\infty)$

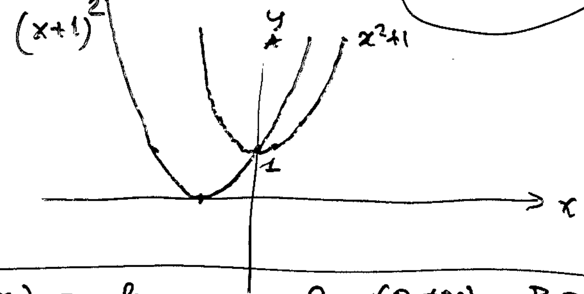
$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x+1$

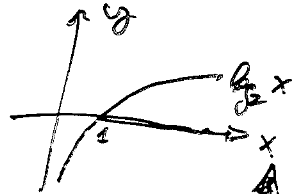
$f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$

A: dominio di $g(x)$: $\mathbb{R}$

B: immagine di $g(x)$: $\mathbb{R}$
dominio di $f(x)$

C: immagine: $[0, +\infty)$





$f(x) = \log_2 x \qquad A = (0, +\infty) \quad B = \mathbb{R}$ devo restringere
$\bar{A} = [1, +\infty) \quad B = [0, +\infty)$

$g(x) = -\sqrt{x}$

$g \circ f(x) = -\sqrt{f(x)} = -\sqrt{\log_2 x} \qquad g \circ f: [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$

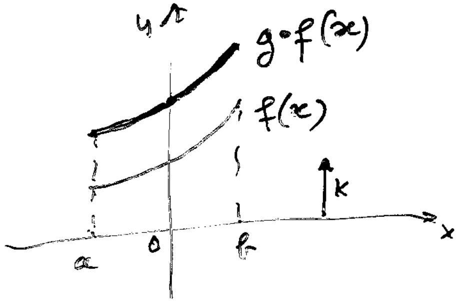
$f \circ g(x) = g(-\sqrt{x}) = \log_2(-\sqrt{x})$ non è definito per alcun valore di x

Traslazione!

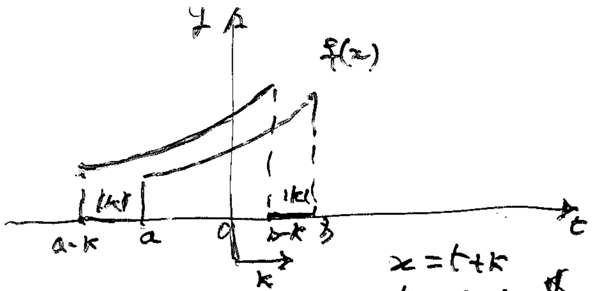
In generale (posto che $f(x)$ sia definita in $x+k$ $\forall x \in A$ su cui f è definita) l'effetto della composizione con $g(t) = t+k$ è:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + k$$

cioè una traslazione del grafico in direzione dell'asse y e verso che dipende dal segno di k (verso uguale a quello di y se $k>0$) e modulo $= |k|$



$$f \circ (g(t)) = f(t+k)$$



$x = t+k$
$t = x-k$

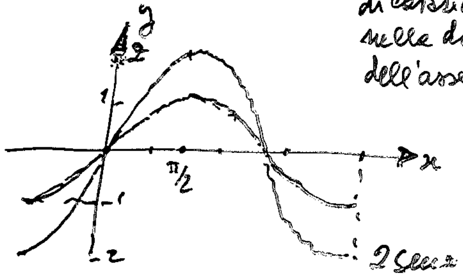
cioè una traslaz. del grafico di $f(x)$ in direz. dell'asse x e verso opposto a quello indicato dal segno di k (e modulo $= |k|$) poiché

Dilatazione

$f(x) = \operatorname{sen} x$ D: $\mathbb{R}$

$g(t) = 2t$ D: $\mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(\operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x$

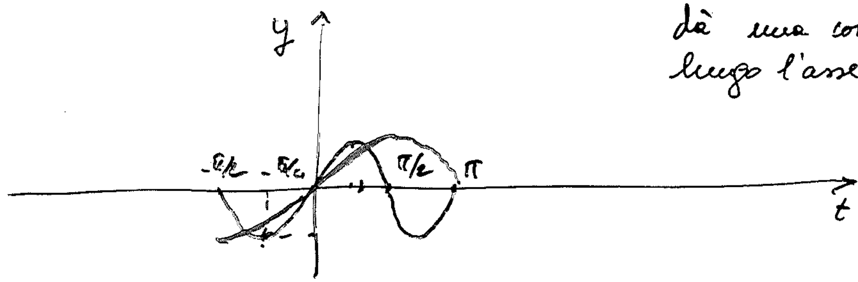


dilatazione nella direzione dell'asse y

$f \circ g(t) = f(2t) = \operatorname{sen} 2t$

$x = 2t$; $t = \frac{x}{2}$

dà una contrazione lungo l'asse x



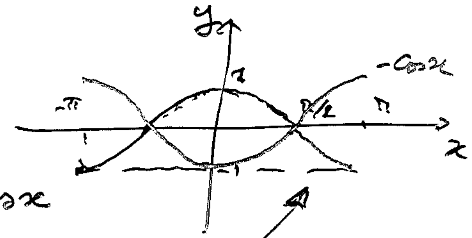
OPPOSTO

$f(x) = \cos x$

$g(t) = -t$

$g \circ f(x) = g(\cos x) = -\cos x$

$f \circ g(t) = \cos(-t) = \cos t$



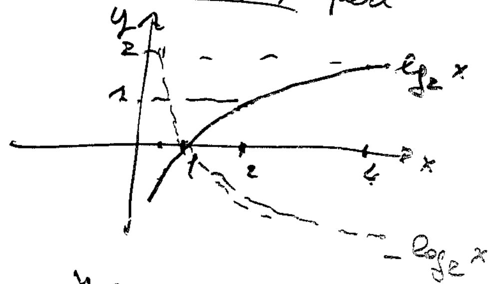
il grafico della seconda composta coincide con quello del coseno poiché $f(x)$ è pari

$f(x) = \log_2 x$

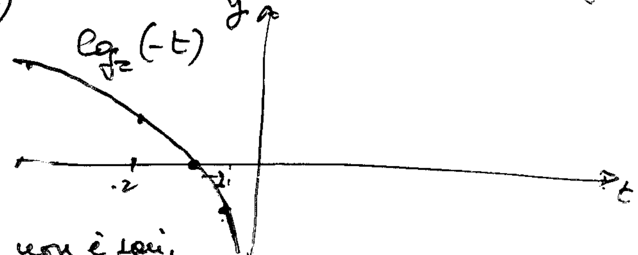
$g(t) = -t$

$g \circ f(x) = -\log_2(x)$

$f \circ g(t) = \log_2(-t)$



$-t = x$
$t = -x$

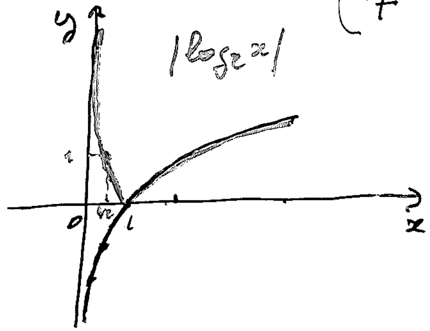


Qui, ove la funzione non è pari, si vede bene la simmetria rispetto all'asse x nel 1° caso
" " y nel 2° caso

$f(x) = \log_2 x$

$g(t) = |t|$

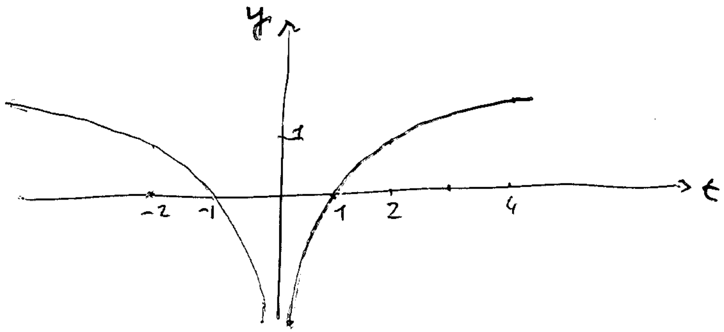
$g \circ f(x) = g(\log_2 x) = |\log_2 x|$



se $t \geq 0$ $\log_2 t$

se $t < 0$: $\log_2(-t)$

$f \circ g(t) = f(|t|) = \log_2(|t|)$



$f \circ g(t)$ è pari? Sì

Sempre: se applico prima una funzione pari e poi un'altra ottengo una funz. pari.

NOZIONE di INVERTIBILITÀ

la composizione è una operazione nell'insieme delle funzioni def. su qualche S.I. $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$

$$(f, g) \longrightarrow g \circ f$$

Chi è l'elemento neutro rispetto alla composizione?

elemento neutro è la funzione identica

$$i(x) = x$$

$$\overset{x}{A} \xrightarrow{f} \overset{t}{B}$$
$$\xleftarrow{g}$$

esiste una funzione tale che

$g \circ f : A \to A$ sia l'identità su A $i_A(x) = x$

e

$f \circ g : B \to B$ sia l'identità su B $i_B(t) = t$?

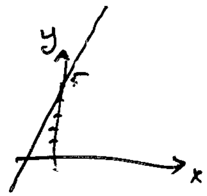
se esiste dirò che:

f è invertibile

e g è la sua inversa: f^{-1}

Esempi

$f(x) = 2x + 5$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



ha inversa?

$t = 2x + 5$

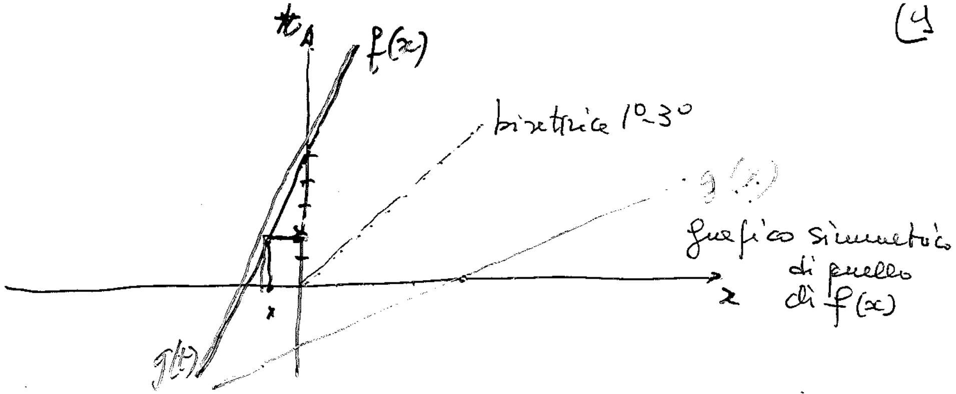
Risolvo rispetto a x:

$$x = \frac{t-5}{2} = g(t)$$

$$g(f(x)) = g(2x+5) = \frac{(2x+5)-5}{2} = x$$

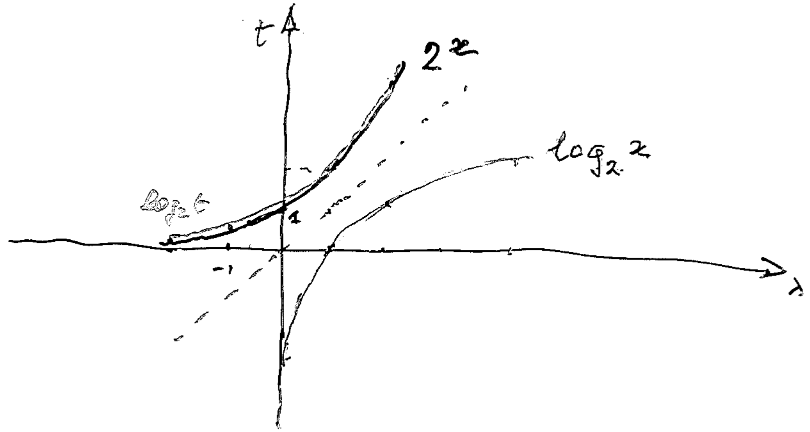
$$f(g(t)) = f\left(\frac{t-5}{2}\right) = 2\,\frac{t-5}{2} + 5 = t$$

$\Rightarrow g(t)$ è l'inversa di $f(x)$



$f(x) = 2^x$ chi è la sua inversa?

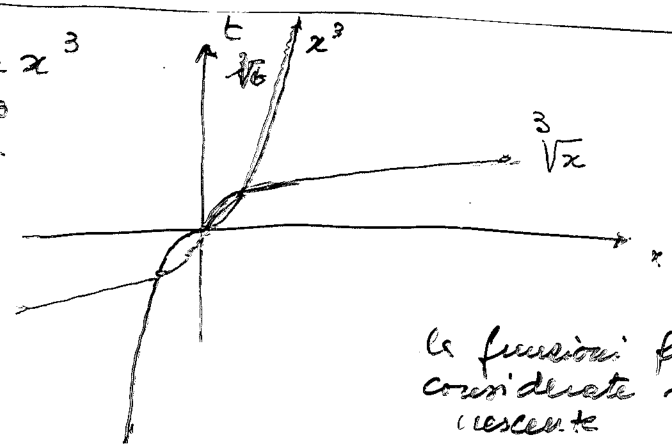
$t = 2^x \Rightarrow x = \log_2 t$



$f(x) = x^3$

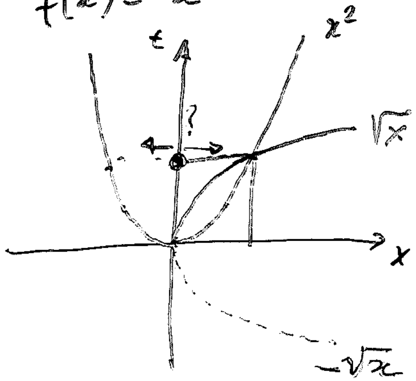
$t = x^3$

$x = \sqrt[3]{t}$



le funzioni fin qui considerate sono monotone crescente

$f(x) = x^2$



$A = [0, +\infty)$

se $x \geq 0$ $\quad t = x^2$

$x = \sqrt{t}$

$\bar{A} = (-\infty, 0]$

se $x \leq 0$ $\quad x = -\sqrt{t}$

ci sono 2 inverse a seconda dell'intervallo considerato

Fondamentale la scelta del dominio

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$: $A = (0, +\infty)$ $\quad B = (0, +\infty)$

monotone (crescenti o decrescenti a seconda che α sia >0 o <0)

$f^{-1}(t) = t^{1/\alpha}$

Funzioni trigonometriche? periodiche ...

$f: A \to \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è biunivoca.

Caso particolare: se f è strettamente monotona su un intervallo allora è invertibile.

DEF $f: A \to B$ è biunivoca se

1. è iniettiva cioè se $a, b \in A$ e $a \neq b$ allora $f(a) \neq f(b)$
2. è suriettiva cioè $\forall b \in B$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.
   cioè $f(A) = B$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \lneq f(x_2) \Rightarrow$ 1 e penso $f: A \to f(A) \Rightarrow$ 2