$f: A \longrightarrow B$ è invertibile se esiste una
$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

funzione $g: B \to A$ tale che

$$g\circ f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

e

$$f\circ g(t) = t \qquad \forall t \in B$$

equivale a dire che esiste 1 e 1 sola soluzione dell'equazione in x

$$t = f(x)$$

Qualche volta la legge $f(x)$ è invertibile solo su un sottoinsieme di A.

TEOREMA $f: A \to B$ è invertibile se e solo se è contemporaneamente:

BIUNIVOCA

1) iniettiva : $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
2) suriettiva su B : $\forall b \in B \ \exists a \in A$ t.c. $b = f(a)$

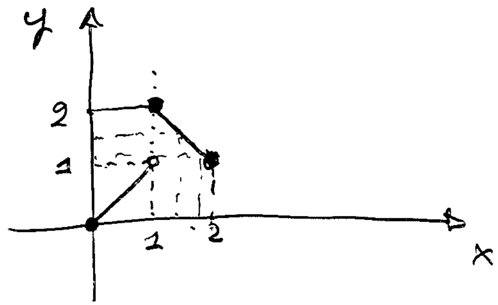
↳ se non lo è restringo l'insieme di arrivo ponendo

$$\tilde{B} = f(A)$$

garantisce l'univocità della legge che a ogni $b \in B$ associa un $a \in A$ (che sarà tale che $f(a) = b$)

Conseguenza:
Se la funz. $f: A \longrightarrow B = f(A)$ è monotona crescente (decresc.) allora f è invertibile

È vero il viceversa, cioè ogni funz $f: A \to f(A)$ invertibile è monotona?



$f: [0,2] \to [0,2]$
è BIUNIVOCA?
è certamente (suriettiva) e iniettiva

Ma non è monotona su $[0,2]$.
La funzione non è continua e questo consente di avere invertibilità pur in assenza di monotonia.

Abbiamo trovato l'inversa per le seguenti funz. elem.:

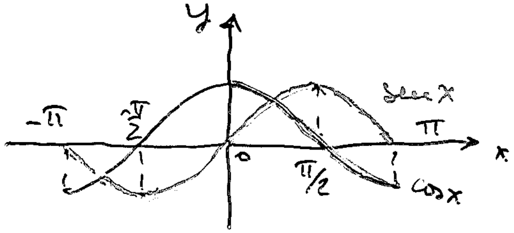
x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad x \in (0, +\infty)$

a^x $\quad a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

$\log_a x$ $\quad a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $x \in (0, +\infty)$

E $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$?

Bisogna individuare gli intervalli di monotonia delle funz. trigonometriche



sen x è monotona crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$ e in tutti i suoi traslati di multipli di 2π:

$$\left[-\pi/2 + 2k\pi,\ \pi/2 + 2k\pi\right]$$

mentre è monotona decrescente in ciascun intervallo del tipo $\left[\pi/2 + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $k \in \mathbb{Z}$

Invece cos x è monotona crescente in

$[-\pi + 2k\pi,\ 2k\pi]$ $k \in \mathbb{Z}$

e monotona decresc. in

$[2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$ $k \in \mathbb{Z}$

Posso invertire in ciascuno di qs. intervalli

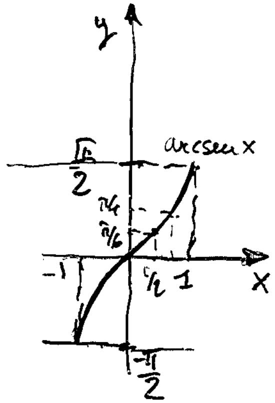
In particolare

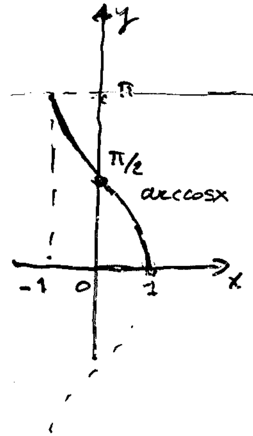
l'inversa di sen x relativamente al dominio $A = [-\pi/2, \pi/2]$ viene chiamata

<u>arcoseno</u> : arcsin y

l'inversa di $y = \cos x$ relativam. al dominio $A = [0, \pi]$ viene chiamata

<u>arcocoseno</u> : arccos y



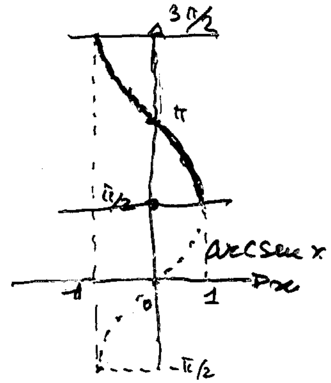


arcsen: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

arccos: $[-1,1] \to [0, \pi]$

sono limitate e definite su insiemi (chiusi) e limitati

e se volessi l'inversa di sen x relativamente all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?



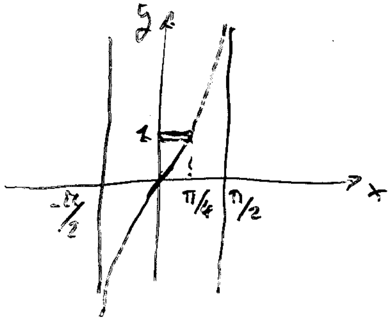
$$\frac{y + \text{arcsen}\, x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \pi - \text{arcsen}\, x$$

Le altre possibili inverse sono solo traslate di multipli di 2π di arcsen x o $\pi - \text{arcsen}\, x$

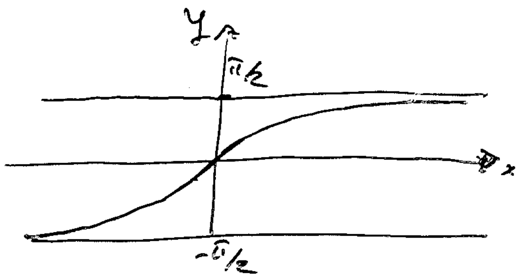
l'inversa di cos x in $[-\pi, 0]$ è $-\arccos x$ e le altre per traslaz. di 2π.

Inversa della tangente $\quad y = \tan x$



$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

chiamo l'inversa relativa a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: arcotangente : arctang



$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

È una funzione limitata

Anche in questo caso se voglio invertire relativamente ad altri domini $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ basterà traslare $\arctan x$ di $k\pi$.

Proprietà di monotonia delle funzioni inverse.

$f : A \to B$

monotona e continua $\Rightarrow$ f^{-1} è monotona con lo stesso tipo di monotonia

Infatti sia ad es.

$a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A$

se $b_1 < b_2$: potrebbe essere $f^{-1}(b_1) \geq f^{-1}(b_2)$?

a $f^{-1}(b_1) \geq f^{-1}(b_2)$ applico f: $b_1 = f \circ f^{-1}(b_1) \geq f \circ f^{-1}(b_2) = b_2$

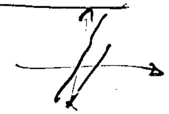
Scomporre:

$f(x) = x^2 - 1$

$x \xmapsto[(\ )^2]{} x^2 \xmapsto[(\ )-1]{} x^2 - 1$

$g(x) = x^2 = t \qquad f(x) = \log(x)$

$h(t) = t - 1$



$f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 1}$

$x \xmapsto[(\ )^2]{} x^2 \xmapsto[2(\ )]{} 2x^2 \xmapsto[(\ )-1]{} 2x^2 - 1 \xmapsto[1/(\ )]{} f(x)$

D: $\mathbb{R}$ $\quad [0,+\infty) \quad [0,+\infty) \quad [-1,+\infty)$

$x \neq \pm 1/\sqrt{2}$ $\qquad$ tolgo lo 0

$g(x) = x^2$

$h(t) = 2t$

$k(s) = s - 1$

$j(z) = \dfrac{1}{z}$

$f(x) = j \circ k \circ h \circ g(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 2}$ $\qquad$ la scomposizione più dettagliata che posso dare è:

$x \xmapsto[p]{} x^2 + 3x \xmapsto[(\ )-2]{} x^2 + 3x - 2 \xmapsto[1/(\ )]{} f(x)$

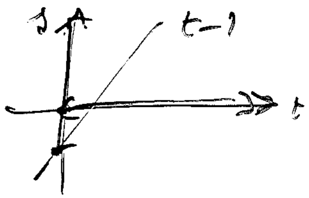
$$f(x) = 2^{(1/\sqrt{x}) - 1}$$

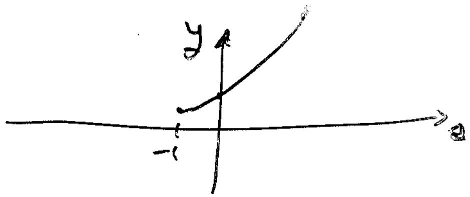
$$x \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{x} \xmapsto{1/(\ )} \frac{1}{\sqrt{x}} \xmapsto{(\ )-1} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \xmapsto{2^{(\ )}} f(x)$$

$[0,+\infty) \longmapsto [0,+\infty)$

A togli 0: $(0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty) \longrightarrow (-1,+\infty) \longrightarrow (2^{-1},+\infty)$

$$f: (0,+\infty) \longrightarrow (1/2,+\infty)$$





$\sqrt{x}$ è monotona crescente; $\frac{1}{z}$ monot. decr. in $(0,+\infty)$; $t-1$ monot. cresc...; 2^t mon. cresc.

la funzione precedente
è monotona e se sì cresc o decresc?

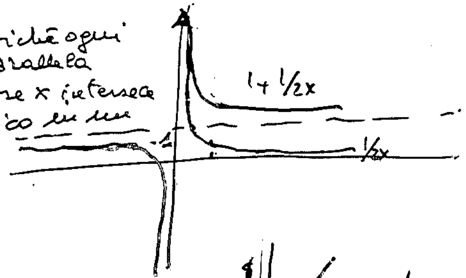
poichè composta di un numero dispari di decrescenti

Le derivate NON SERVONO

Calcolare l'inversa (se esiste) di

$$1 + \frac{1}{2x}$$

Esiste? sì — poichè ogni parallela all'asse x interseca il grafico in un solo punto



da $y = 1 + \frac{1}{2x}$

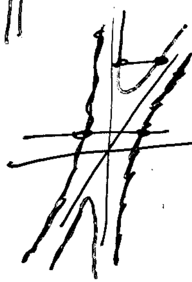
risolvo in funz di x

$$y-1 = \frac{1}{2x}$$

$$2x = \frac{1}{y-1}$$

$$x = \frac{1}{2(y-1)}$$

Invece:



Non invertibile

$$f(x) = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \quad \text{è invertibile}$$

Calcolo l'inversa:

$$y = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$\log_2 y = \log_2\left(2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}\right) \quad \text{cioè} \quad \log_2 y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \log_2 y + 1$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\log_2 y + 1}$$

$$x = \left(\frac{1}{\log_2 y + 1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} \leq 7 \qquad \text{base} < 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} \leq 7$$

$\log_{3/2}(\ )$ monot. crescente

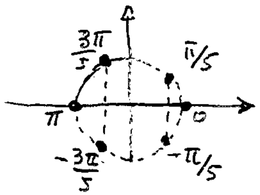
$$2x-1 \leq \log_{3/2} 7$$

$$2x \leq \log_{3/2} 7 + 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}\log_{3/2} 7 + \frac{1}{2}$$

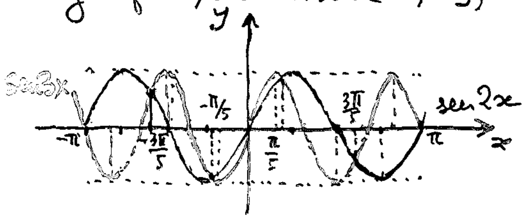
$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x$ in 2 situazioni:

- $3x = 2x + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$
- $3x = (\pi - 2x) + 2k\pi \Rightarrow 5x = \pi + 2k\pi$ cioè $x = \frac{\pi}{5} + k\cdot\frac{2\pi}{5}$



soluzioni nell'intervallo $(-\pi, \pi]$

Se volessi studiare $\operatorname{sen} 3x \leq \operatorname{sen} 2x$? Traccio i 2 grafici, ad es. in $(-\pi, \pi]$, tenendo conto che $\operatorname{sen} 2x$ è contratto di un fattore 2 lungo l'asse x rispetto a $\operatorname{sen} x$ e similmente $\operatorname{sen} 3x$. Si sono già trovati i punti in cui i due grafici si intersecano $\Rightarrow$ guardo il grafico e trovo che la disug. vale per $x \in [-\pi, -\frac{3\pi}{5}] \cup [-\frac{\pi}{5}, 0] \cup [\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}]$ e traslati di $2k\pi$.

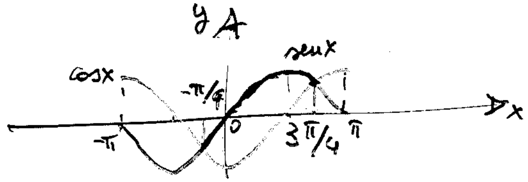


Più facile:

$$\operatorname{sen} x + \cos x > 0$$

$$\operatorname{sen} x > -\cos x$$

Traccio il grafico di $\operatorname{sen} x$ e $-\cos x$. Si intersecano in $(-\pi, \pi]$ nei punti $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$. Guardando la posizione dei grafici trovo le soluzione in $(-\pi, \pi)$:



$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

e poi per periodicità

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

ove $k \in \mathbb{Z}$.

Oppure è equivalente a

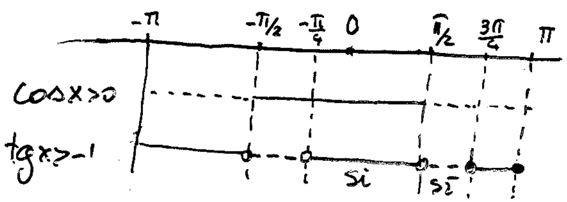
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0 \qquad \text{cioè:}$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff 0 + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$\boxed{\text{PERICOLOSO}}$

$\cos x\,(\operatorname{tg} x + 1) > 0$ dopo aver osservato che $\cos x = 0$ non è soluz. e quindi posso considerare $\operatorname{tg} x$



$-\pi/4 < x < \pi/2 \quad \pi/2 < x < 3\pi/4$

e $x = \pi/2$? CE LO SIAMO PERSI usando $\operatorname{tg} x$