OSSERVAZIONI SUL VALORE ASSOLUTO

a) $-|x| \leq x \leq |x|$

b) $|x| < a$ (con $a > 0$) significa

$0 \leq x < a \ \vee \ 0 < -x < a$

$\Updownarrow$

$0 \leq x < a \ \vee \ -a < x < 0$

$-a < x < a$

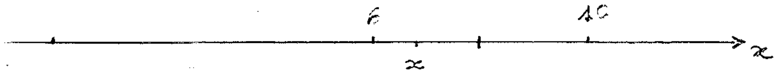
o anche:

la distanza del punto di ascissa x da 0 è inferiore ad a.

ESEMPI

1) x è più distante da 10 che da 6, significa

$$|x-10| > |x-6|$$



Le soluzioni sono date da $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$. Perché?

$$\left.\begin{array}{lll} x \leq 6 : & 10-x > 6-x & \text{sempre} \\ 6 < x \leq 10 : & 10-x > x-6 : & 6 < x < 8 \\ x > 10 : & x-10 > x-6 : & \text{mai} \end{array}\right\} x < 8$$

2) x ha distanza 5 da 3 significa $|x-3| = 5$

3) x è compreso strettamente tra 15 e 23

si può rileggere $\left(\frac{15+23}{2} = 19 \quad , \ 19-15=4\right)$

$$|x-19| < 4$$

c) $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$: Proprietà triangolari

$\hookrightarrow$ banale via (a), (b)

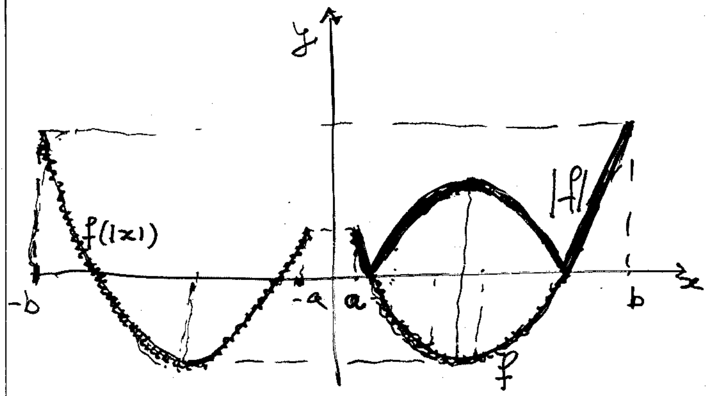
$\Updownarrow$

$-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|$

$\Updownarrow$

$|y| \leq |x|+|x+y| \ \wedge \ |x| \leq |y|+|x+y|$

Attenzione alla composizione con il valore assoluto!



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$|f(x)| = (|\ | \circ f)(x)$

$|f(x)| = \begin{cases} \text{se } f(x) \geq 0 : f(x) \\ \text{se } f(x) < 0 : -f(x) \end{cases}$

cioè ribalto la parte di grafico con $y < 0$.

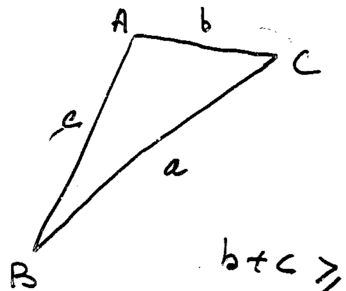
Invece:

$f(|x|) = (f \circ |\ |)(x)$

significa simmetrizzare dominio e grafico risp. asse y e

Tenere tanto la funz definita su $(-b,-a)$ che quella definita su (a,b)

Illustrazione delle proprietà TRIANGOLARI elementari



$\overline{AB} = c$

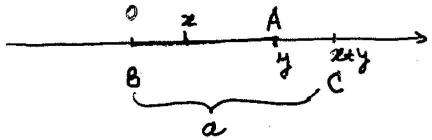
$\overline{BC} = a$

$\overline{AC} = b$

$b + c \geq a$

$|a-b| \leq c$

Il trasferimento al valore assoluto di queste proprietà può essere delicato.



Vediamolo nel caso facile (VALE =)

$AB = |y|$

$AC = |x|$

$AB + AC = |x|+|y| \geq |x+y| = BC$

SUCCESSIONI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Successione: funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$n \longmapsto a_n$

Cioè anche: $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$= \{a_n\}$

Esempi:

$\{n^2\} = \{0, 1, 2^2=4, 3^2=9, \dots, n^2, \dots\}$

$\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$: 1 e −1 a seguirsi alterni

$\{3^{1/(n+1)}\} = \{3^1=3,\ 3^{1/2}=\sqrt{3},\ 3^{1/3}=\sqrt[3]{3},\ \dots,\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{di posto } n}}{3^{1/(n+1)}},\ \dots\}$

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{-1}{1}=-1,\ \frac{0}{2}=0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \dots\ \frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}, \dots\right\}$

Graficamente (ATTENZIONE: DOMINIO $\mathbb{N}$)

La successione $\{a_n\}$ è detta

- SUPERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è sup. limitato cioè $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \le L$
- INFERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è inf. lim. cioè $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\ell \le a_n$
- LIMITATA se inf e sup-limitata

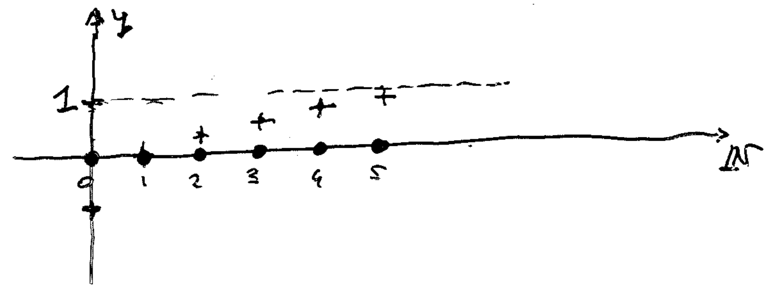
VEDI ESEMPI PRECEDENTI

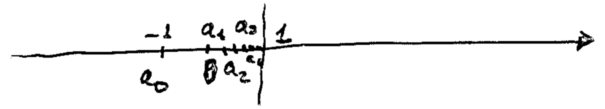
$3^0 < 3^{1/(n+1)} < 3^1 \Rightarrow$ succ. $\{3^{1/(n+1)}\}$ limitata

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$

$a_n = 1 - \frac{2}{n+1}$

$\frac{2}{n+1} > 0 \Rightarrow a_n < 1$

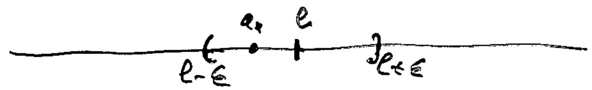




→ Modi per dare il grafico di una successione

COMMENTO alla disuguaglianza che compare nella def. di succ. conv. V.PAG5

$|a_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$



a_n cade nell'intervallo aperto di centro ℓ e raggio ε

COMMENTO a succ. irregolari V. PAG5 ~~(PREMETTERE LA LETTURA DI PAG5)~~

$\{(-1)^n\}$ $\quad n = 2k \quad (-1)^{2k} = 1$

$\varepsilon = 1/2$ ci sono infiniti valori della successione nell'intervallo $(1/2, 3/2)$

Ma ce ne sono infiniti anche nell'intervallo $(-3/2, -1/2)$

non posso dire che la succ. converge a 1 né che converge a −1 ....

Successioni convergenti

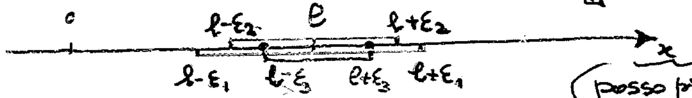
$\boxed{\{a_n\} \to \ell}$ la successione $\{a_n\}$ CONVERGE al numero reale ℓ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \ \forall n \geq k : \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

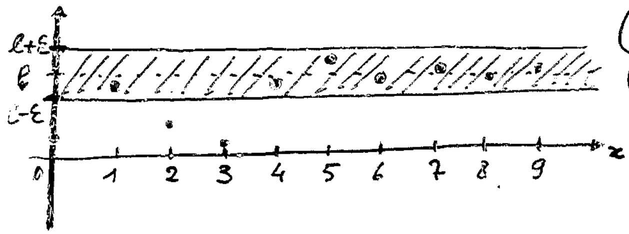
cioè $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$
vedi commento a pag 4

Il limite se esiste è UNICO

Graficamente:



posso prendere ε sempre più piccolo: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ ma nell'intervallo centrato in ℓ di semiampiezza ε troverò tutti gli a_n, da un certo indice in poi.



ES. $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$ perché

$\varepsilon = 1/10$

Successioni divergenti

$\boxed{\{a_n\} \to +\infty}$ la successione DIVERGE A $+\infty$ se: $\forall M > 0$, reale, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$
$a_n > M$

$\boxed{\{a_n\} \to -\infty}$ la successione DIVERGE A $-\infty$ se: $\forall M > 0$ reale $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$
$a_n < -M$

Successioni irregolari ES. $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^n\}$

ma $\{(-1)^n\}$ può convergere a qual cosa? (PROSEGUE da pag 4)

$\{a_n\} = \{(-1)^n\} \to \ell \quad (\neq \pm 1)$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \ | \ \forall n \geq k : \quad |\ell - (-1)^n| < \varepsilon$$

Dovrei avere ℓ contemporaneamente tale che

$n = 2h \quad -\varepsilon < \ell - 1 < \varepsilon$
$1-\varepsilon < \ell < 1+\varepsilon$

$n = 2h+1 \quad -\varepsilon < \ell + 1 < \varepsilon$
$-1-\varepsilon < \ell < -1+\varepsilon$

che è impossibile

È limitata ($\Rightarrow$ non può divergere). Quindi ho un Esempio di successione irregolare.

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$ perché

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \ \text{t.c.} \ \forall n \geq k \quad \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \left| \frac{-2}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff_{n+1>0}$$

$$\iff \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \iff k > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$: $k > 20-1$ ↳ $k=20$; $\varepsilon = \frac{1}{10^2}$ $k > 200-1$ ↳ $k=200$ ecc.

Successioni monotone.

$\{a_n\}$ monotona crescente (non decrescente) se $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n \le a_{n+1}$

" strettamente crescente ..... $a_n < a_{n+1}$

" decrescente (non crescente) se $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n \ge a_{n+1}$

" Strett. decres " " : $a_n > a_{n+1}$

cioè $\exists k\in\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ con $n\ge k$ succede che--

TEOR. sul carattere delle succ. monotone

Non sono mai irregolari:

se $\{a_n\}$ è "definitivamente crescente (non decrescente)" $\{a_n\}\to \operatorname{Sup} a_n$

se $\{a_n\}$ è "definitivamente decrescente (non crescente)" $\{a_n\}\to \operatorname{Inf} a_n$

ove $\operatorname{Sup} a_n = +\infty$ se $\{a_n\}$ non è sup limitata e $\operatorname{Inf} a_n = -\infty$ ... inf.

ESEMPIO. Per quali $q\in\mathbb{R}$ è monotona la succ. $\{a_n\}=\{q^n\}$?

Se $q>1$: $q^{n+1} > q^n$ monotona STRETTAM. CRESCENTE NON SUP. LIMITATA

Se $q=1$: $\{1^n\}$ successione costante (LIMITE : 1)

Se $0<q<1$: $0<q^{n+1}<q^n$ monotona STRETTAM. DECRESCENTE INFERIORMENTE LIMITATA.

Se $q=0$: $\{0^n, n\ge 1\}$ successione costante (LIMITE 0)

Se $-1<q<0$: SUCCESSIONE A SEGNI ALTERNI ma $|q^n| = |(-q)^n|$ ... converge a 0

Se $q=-1$ $\{(-1)^n\}$ successione IRREGOLARE

Se $q<-1$: successione IRREGOLARE :

Se $q>1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$
Se $q=1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = 1$
se $\lvert q\rvert<1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Ricordare

$\{q^{2k}\}$ è monotona crescente e $\to +\infty$

$\{q^{2k+1}\}$ " decrescente e $\to -\infty$ $\Big\}\{q^n\}$ comunque è irregolare

COMMENTO

pensando la succ. come una funzione dovrei dire che

$\{a_n\}$ è strett. cresc. se $\forall m,n\in\mathbb{N}$
$m<n \Rightarrow a_m<a_n$

$\Rightarrow$ $n<n+1$

se è str. cresc. nel senso della def. di funz str. cresc. si dovrà avere $a_n<a_{n+1}$

Ma basta dire che $\forall n$ si ha $a_n<a_{n+1}$ per garantire che $\{a_n\}$ è strett. cresc. pensata come funzione ?

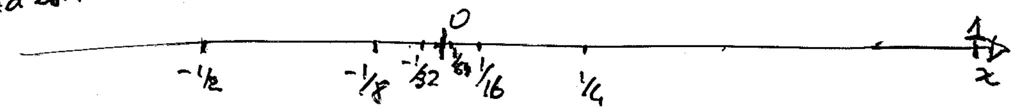
Sì. Sia $m>n$. Allora

$$m = n + (m-n)$$

se $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n<a_{n+1}$ posso dire

$$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<a_{n+3}<\dots<a_{n+(m-n)}=a_m$$

Ad es.:



$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \longrightarrow 0$$