DEFINIZIONI (VISTO IERI)

la succ. $\{a_n\}$ converge ad $a \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \varepsilon \in \mathbb{R} \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ \forall n \geq k$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \left(\text{oppure } |a - a_n| < \varepsilon\right)$$

la succ. $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ se

$$\forall M > 0 \ , \ M \in \mathbb{R} \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ \forall n \geq k$$

$$a_n > M$$

la succ. $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ se

$$\forall M > 0 \ , \ M \in \mathbb{R} \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ \forall n \geq k$$

$$a_n < -M$$

OSSERVAZIONI

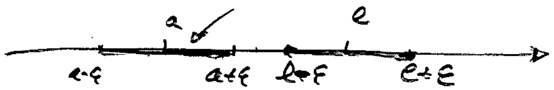
Il limite, se esiste (cioè se la succ. non è oscillante), è unico. VERIFICHIAMOLO

I) se la succ. converge?

Supponiamo che ci siano due limiti:

$$a \ , \ l \quad \text{t.c.} \ a < l$$

Considero $\varepsilon < \dfrac{l-a}{2}$



$\exists k$ t.c. $\forall n \geq k$ $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\exists h$ t.c. $\forall n \geq h$ $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

$$n \geq \max(h, k) \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

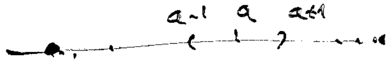
IMPOSSIBILE! $\emptyset$

Ogni succ. convergente ($\{a_n\} \to a$) è limitata

Fisso $\varepsilon = 1$. Esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ $a_n \in (a-1, a+1)$

A di fuori ci sono tutt'al più i punti $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$

$$m = \min(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a-1)$$



$$M = \max(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a+1)$$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $m \leq a_n \leq M$

$\Rightarrow$ succ. limitata

Ogni succ. divergente è non limitata

per definizione!

In particolare se $\{a_n\} \to +\infty$ sarà non limitata superiormente

se $\{a_n\} \to -\infty$ sarà non limitata inferiormente

ORA TORNIAMO ALL'UNICITÀ DEL LIMITE:

II) se $\{a_n\} \to +\infty$ non può avere anche un limite finito (altrimenti sarebbe limitata)

ma nemmeno limite $-\infty$ poiché le due def. sono antitetiche (VEDI ANCHE CHE COSA SUCCEDE con la limitatezza).

$\Rightarrow$

Anche le successioni divergenti hanno limite unico.

TEOREMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

1) PERMANENZA DEL SEGNO

$\{a_n\} \to a$ con $a>0$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$

si legge anche: (CONTRONOMINALE vedi pag 5)

$\{a_n\} \to a$ con $a_n \leq 0$ (almeno da un certo indice in poi) $\Rightarrow a \leq 0$

Valgono anche le versioni con il cambio di verso nelle disuguaglianze.

2) (CONSEGUENZA che si prova dopo "OPERAZIONI SUI LIMITI")

Se $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to a \\ \{b_n\} \to b\end{array}\right\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (o almeno $\forall n \geq k$ con $k \in \mathbb{N}$ fissato) $a_n \leq b_n$

Allora $a \leq b$.

3) CONFRONTO (VEDI dim. a pag. 5)

$\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to \ell \\ \{c_n\} \to \ell\end{array}\right\}$ e $\forall n \dots : a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \{b_n\} \to \ell$

4) LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

OPERAZIONI SUI LIMITI FINITI

Siano $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ successioni convergenti (a, b sono quindi FINITI). Allora

- $\{a_n + b_n\} \to a+b$
  - $\{-b_n\} \to -b$ e quindi $\{a_n - b_n\} \to a-b$
- $\{a_n b_n\} \to ab$ PER VEDERLO SERIE 4
  - $\left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to \frac{1}{b}$ purché $\forall n$ sia $b_n \neq 0$ e sia $b \neq 0$ ← SERIE 2 VEDI PAG 6
- e quindi $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ " " "
- $\{a_n^{b_n}\} \to \{a^b\}$ purché $\forall n$ sia $a_n > 0$ e sia $a > 0$,

Dimostrazione del teor. della perm. del segno

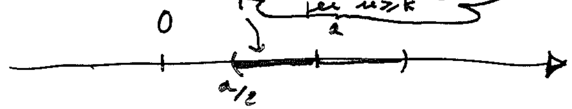
$\{a_n\} \to a > 0$

Visto che converge $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \dots$

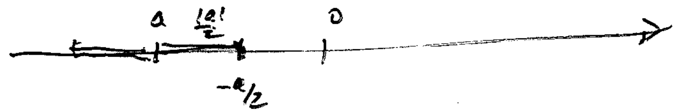
Scelgo $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Per def di convergenza $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} < a_n < \underbrace{a + \frac{a}{2}}_{\text{INUTILE}}$$

$\Rightarrow 0 < a_n$ VISIVAMENTE:



se $\{a_n\} \to a < 0$: $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$



$\Rightarrow \exists k \mid \forall n \geq k$ si abbia $a_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0$

c.v.d.

---

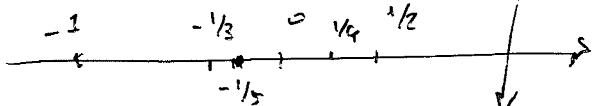
se $\{a_n\} \to 0$ posso dire qualcosa sul segno?

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$: $a_n > 0$ sempre

$\left\{-\frac{1}{n}\right\} \to 0$: $a_n < 0$ "

NO

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$



gli a_n non hanno segno definito.

CONTRONOMINALE DEL TEOR DELLA PERM. del SEGNO

$\mathcal{Y} \Longrightarrow \mathcal{T}$ VERA

$\neg \mathcal{T} \Longrightarrow \neg \mathcal{Y}$ se non è vera la tesi non può essere vera l'ipotesi

Ambiente: $\{a_n\}$ converge al limite a.

$\underbrace{\text{se } a > 0}_{\text{ip.}}$ allora $\underbrace{\exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n \geq k \text{ si a } a_n > 0}_{\text{tesi}}$

$\boxed{\text{Contronominale}}$

$\underbrace{\forall n \geq k \text{ opportuno si a } a_n \leq 0}_{\neg \mathcal{T}} \Longrightarrow \underbrace{a \leq 0}_{\neg \mathcal{Y}}$

Esempio di $a=0$ con $a_n<0$: $a_n = -\frac{1}{n}$

Per l'altro verso, la contronominale dice:
Sia $\{a_n\}$ una succ. convergente ad a.
se $\forall n \geq k$ opportuno risulta $a_n \geq 0$ allora $a \geq 0$

Dim. del teorema del confronto

$\{a_n\} \to \ell$: $\forall \varepsilon.\ \exists k_1$ t.c. $\forall n \geq k_1$ risulti $\ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon$

$\{c_n\} \to \ell$: $\forall \varepsilon.\ \exists k_2$ t.c. $\forall n \geq k_2$ " $\ell-\varepsilon < c_n < \ell+\varepsilon$

$\boxed{\text{se } a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n!}$

$k = \max(k_1, k_2)$. $\forall n \geq k$ si ha $\ell-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell+\varepsilon$

cioè $\ell-\varepsilon < b_n < \ell+\varepsilon$

cioè $\forall \varepsilon$ ho trovato k che realizza la disug. $\Rightarrow \{b_n\} \to \ell$ come si voleva dimostrare!

Dimostro che

se $\{b_n\} \to b$ $\quad (b_n \neq 0 \ \forall n,\ b \neq 0)$

$$\Longrightarrow \left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to \frac{1}{b}$$

Cioè mi chiedo:

$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| < \varepsilon$? esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si realizzi questa disug.?

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{b_n - b}{b\, b_n}\right| < \varepsilon \iff \frac{|b_n - b|}{|b|\,|b_n|} < \varepsilon \iff$$

$$\iff |b_n - b| < \varepsilon\, |b|\,|b_n| \qquad (*)$$

Osservo che dato che $\{b_n\} \to b \neq 0$

$0 < |b_n| < L$

↳ e $\underset{\ell}{\underset{\|}{\inf |b_n|}} \neq 0 \qquad \Rightarrow \ \ell < |b_n| < L$

Ora cerco k t.c. $\forall n \geq k$ si ha $|b_n - b| < \varepsilon |b| \cdot \ell$

(e quindi $|b_n - b| < \varepsilon |b| \cdot |b_n|$)

il k esiste poiché $\{b_n\} \to b$ e quindi abbiamo provato la disuguaglianza (*)

$$\boxed{\text{Invece di scrivere } \{a_n\} \to a \quad \text{scrivo } \lim_{n\to+\infty} a_n = a}$$

(1) Cercare il limite di:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1-2n}{n^2} \right\}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{2n}{n^2} \right\} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \right) - \left(\lim_{n\to+\infty} 2 \right) \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \right)$$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \to 0$ poiché $\forall \varepsilon \; \exists k \mid \forall n \geq k \quad \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow$

$$= 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

OPPURE, PIÙ VELOCE:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{-2n}\right)}{n^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} \right) \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) =$$

$$(-2 \cdot 0)(1 - 0) = 0$$

(2) $(n \neq 0)$ 1ª strada

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2} \right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \right) \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{1-2n^2} \right) =$$

$$= \left[\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1-2n^2}{3n^2}} \right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n^2}{3n^2}} =$$

$$= (1-0) \cdot \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3n^2} - \frac{2}{3} \right)} = 1 \cdot \frac{1}{0 - \frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

2ª strada, EFFICIENTE

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{\cancel{n}} \cdot \frac{3n^{\cancel{2}}}{1-2n^2} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - 3n}{1-2n^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{-2\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)} = \frac{-3}{2}$$

(3)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2^{\frac{1-2n}{n^2}} \right) = \left(\lim_{n\to+\infty} 2 \right)^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{n^2}} = 2^0 = 1$$

(4)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{\frac{3n^2}{1-2n^2}} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n} \right)^{\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{1-2n^2}} = 2^{-3/2}$$

ARITMETICA delle SUCC. DIVERGENTI e Forme di indecisione.

Se una o ambedue le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ DIVERGONO cosa succede?

I) SOMME - DIFFERENZE

$$\{a_n\} \to a \qquad \{b_n\} \to \pm\infty \qquad \Rightarrow \qquad \{a_n \pm b_n\} \to \pm\infty$$

$$\{a_n\} \to +\infty \qquad \{b_n\} \to +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \{a_n + b_n\} \to +\infty$$

$$\{a_n\} \to -\infty \qquad \{b_n\} \to -\infty \qquad \Rightarrow \qquad \{a_n + b_n\} \to -\infty$$

E $\{a_n - b_n\}$? $\quad [+\infty - \infty]$ $\quad [-\infty - (-\infty)]$? FORMA DI INDECISIONE

ES. $\{n - n^2\} \to -\infty$ $\qquad$ Bisogna ragionare ogni volta!

$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} \to 0$ $\qquad$ VEDERE IL CALCOLO A PAG. 10

$\{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}\} \to 1$

II) PRODOTTI

$$\{a_n\} \to a>0 \qquad \{b_n\} \to \pm\infty \qquad \{a_n b_n\} \to \pm\infty$$

$$a<0 \qquad \pm\infty \qquad \mp\infty$$

$$\{a_n\} \to +\infty \qquad \{b_n\} \to +\infty \qquad \{a_n b_n\} \to +\infty$$

ECC. : ARITMETICA DEI SEGNI

E $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to \pm\infty$? $\quad [0 \cdot (+\infty)]$? $\quad [0 \cdot (-\infty)]$? $\quad$ F.I.

$$\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = (+\infty) - (+\infty) \quad : \text{INDECISIONE } [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{-n^2}_{\to -\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n^2}\right)}_{\to 1} = -\infty$$

VEDI II PRODOTTI

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (+\infty) - (+\infty) \quad : \text{INDECISIONE } [\infty - \infty]$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}_{\to +\infty}} =$$

$\{\sqrt{n+1}\} \to +\infty \quad \{\sqrt{n}\} \to +\infty$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}\right) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2n) - (n^2+4)}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-4}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+4}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-4}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} + \sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-4}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-4}{n+n} = 1$$

$\sqrt{n^2} = |n| = n$