PROSEGUE DA IERI.

ES

VEDI PAG 2

$$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (2n^2-1) \right\}$$

$$\left\{ (n^{-3}) \cdot (2n^2-1) \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (n^3) \right\}$$

Significa che $\{b_n\} \to 0$ e i b_n sono tutti (o almeno da un certo n in poi) POSITIVI. In generale $\{b_n\} \to b^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste k t.c. se $n \geq k$ $0 < b_n - b < \varepsilon$.

PERCHÉ DEVO PRECISARE che $\{b_n\}$ tende a zero DA DESTRA?

VEDI PAG 3

a seconda del segno di a

III) RAPPORTI

$\{a_n\} \to a \neq 0$ $\quad \{b_n\} \to 0^+$ $\quad \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \pm\infty$

Analogamente se $\{b_n\} \to 0^-$ o se $\{a_n\}$ diverge

$\{a_n\} \to a$ finito $\quad \{b_n\} \to \pm\infty$ $\quad \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to 0$

Invece $\{a_n\} \to 0$ $\quad \{b_n\} \to 0$? $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$ F.I.

$\{a_n\} \to +\infty$ $\quad \{b_n\} \to +\infty$? $\quad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ F.I.

ES. PRECEDENTI

FORME DI INDECISIONE ARITMETICHE:

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

ESERCIZIO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5}$$

VEDI FINE PAG 3

ESEMPI INIZIO PAG 1

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2(2 - 1/n^2)}{n^2(1 + 1/n^2)} = 2$$

$[0 \cdot \infty]$

$$\lim_{n \to +\infty} (n^{-3}) \cdot (2n^2-1) = [0 \cdot \infty] = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2-1}{n^3} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}\right) \cdot (n^3) = [0 \cdot \infty] = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n^2(1 + 1/n^2)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

III) Dico che $\{b_n\}$ tende a b da sinistra e scrivo

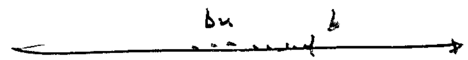
$$\lim_{n \to +\infty} b_n = b^-$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k$ si abbia

$$-\varepsilon < b_n - b < 0$$

cioè anche

$$0 < b - b_n < \varepsilon$$



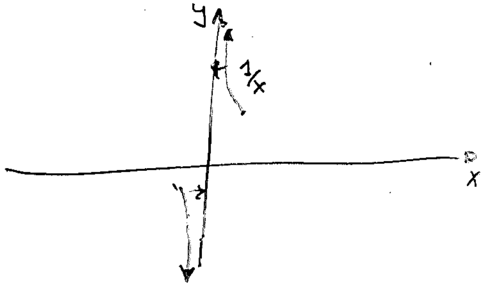
perché chiedo $\{b_n\} \to 0^+$ se devo trovare il limite di $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ e so che $\{a_n\} \to a$ con $a \neq 0$? (andrebbe bene anche $\{b_n\} \to 0^-$)

<u>Esempio</u> $\{a_n\} = \{1\}$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}}\right\} = \left\{\frac{n}{(-1)^n}\right\} = \left\{(-1)^n n\right\}$$

questa succ. non ha limite



$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{1/2}} = 0$$

N: $+\infty - 0 + 0 + 1 \to +\infty$ come $2n^{3/2}$

D: $0 + \infty + 5 \to +\infty$ come n^2

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n - n^{3/2} + 2n^3 - 5}{2 - n + n^2 - 5n^3} =$$

per mettere in evidenza l'infinito di ORDINE SUPERIORE (prevalente)

cerco a Num. e Denom. la potenza di grado MAX

In questo caso è tanto a NUM che a DEN n^3

$\Rightarrow$ metto in evidenza n^3 con il SUO COEFFIC.

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3\left(1 - \frac{1}{2}n^{-3/2} + \frac{3}{2}n^{-2} - \frac{5}{2}n^{-3}\right)}{-5n^3\left(1 - \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n^2} - \frac{2}{5n^3}\right)} =$$

$\to 1$

$\to 1$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n^3}}{-5\cancel{n^3}} = -\frac{2}{5}$$

VEDI INIZIO PAG 6

$\{\operatorname{sen} n\}$ irregolare, ma $|\operatorname{sen} n| \leq 1$. Se divido per $\{n\} \to +\infty$ trovo

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ la succ. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$ poiché $\forall \varepsilon > 0$

$\exists k \mid \forall n \geq k$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$ (basta prendere $n > 1/\varepsilon$)

Più in generale se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ diverge allora $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to 0$

Infatti

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \le \frac{L}{|b_n|} \quad \text{se } |a_n| \le L$$

e $\frac{L}{|b_n|}$ può essere reso più piccolo di qualunque $\varepsilon > 0$ pur di prendere n abbastanza grande

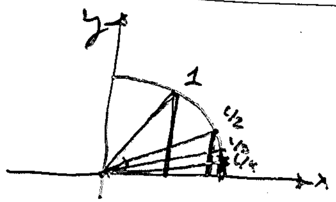
---

Del tutto analogo

se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\} \to 0$ allora $\{a_n \cdot b_n\} \to 0$.

---

1 $\left\{\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$?



la lunghezza dell'arco tende a confondersi con la lunghezza del segmento di perpendicolare che proietta nell'asse x l'intercetta sulla circonf. goniom. dell'arco

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ATTENZIONE: perché un rapporto converga non è necessario che convergano (o che siano regolari) la SUCC. NUMERATORE e la SUCC. DENOMINATORE.

ES. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$ ha il numeratore irregolare ma $|\operatorname{sen} n| \le 1$

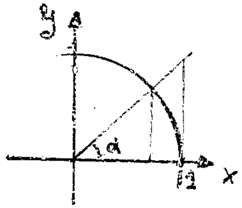
Vale il criterio: $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a_n b_n\} \to 0$

Dunque $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$

Invece $\left\{\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$?

e $\left\{n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$?

VEDI PAG 7 PUNTO 3



se $\{a_n\} \to 0$: $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$ LIMITE NOTEVOLE

2) $\left\{ \cos \frac{1}{n} \right\}$?

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} + \cos^2 \frac{1}{n} = 1 \qquad \cos \frac{1}{n} = + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}} = 1$$

Questi discorsi si estendono a

$$\{\operatorname{sen}(a_n)\} \qquad \{\cos(a_n)\}$$

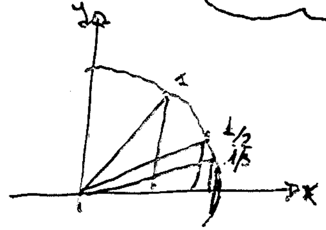
se $\{a_n\} \to 0$.

Infine applico il teor. del confronto: $\{\cos a_n\} \to 1$, $\{1\} \to 1$ $\Rightarrow \left\{ \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \right\} \to 1$

---

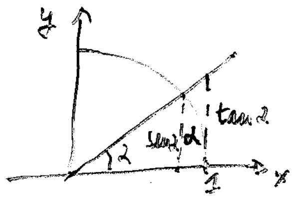
3) $\{n \cdot \operatorname{sen} 1/n\}$: $[\infty \cdot 0]$

$$\left\{ \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} \right\} \to 1 \; : \; \left[\frac{0}{0} \right]$$



e in generale $\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ se $\{a_n\} \to 0$

Posso vederlo con il teor. del confronto



$$\operatorname{sen} \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha \qquad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{sen} a_n \leq a_n \leq \frac{\operatorname{sen} a_n}{\cos a_n} \qquad a_n \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen} a_n \neq 0$$

$$1 \leq \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n} \Rightarrow \cos a_n \leq \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \leq 1$$

Per quanto riguarda i logaritmi, tener presente che

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log_c b_n}{\log_c a_n} \qquad (a_n > 0, \; b_n > 0) \quad \neq 1$$

Conviene riportarsi a questa forma, con $\boxed{c > 1}$.

Allora

$$\{a_n\} \to a > 0 \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to \log_c a$$

$$\{a_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to +\infty$$

$$\{a_n\} \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to -\infty$$

VEDI COMMENTO A PAG 9

ES. $\left\{ \log_{10} \frac{1}{n} \right\} \to -\infty$

VEDI PAG 9

$$\left\{ \log_2 \frac{n^2 + 3n}{2n^2 - 1} \right\} \to -1$$

Per gli esponenziali e/o potenze (VEDI PAG 10-11)

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (a_n > 0)$$

Non ci sono forme di indecisione per i logaritmi

Invece per gli esponenziali:

$$c^{0 \cdot \infty} \begin{cases} (c^0)^\infty & : [1^\infty] \\ (c^{+\infty})^0 & : [\infty^0] \\ (c^{-\infty})^0 & : [0^0] \end{cases}$$

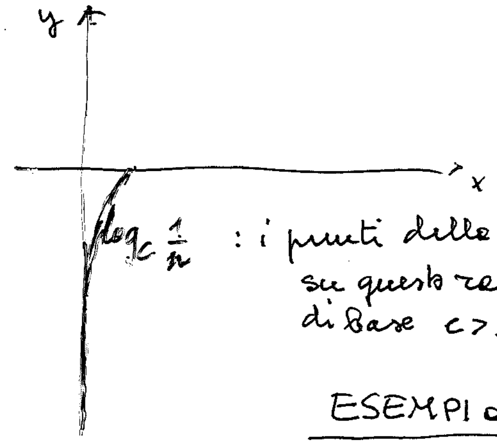
Non ci sono altre forme di indecisione.

se $\{a_n\} \to 0^+$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \log_c\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$. Ma

$\log_c a_n = -\log_c\left(\frac{1}{a_n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \log_c a_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\log_c \frac{1}{a_n}\right) = -\infty$



$\log_c \frac{1}{n}$: i punti della succ. $\{\log_c \frac{1}{n}\}$ stanno su questo ramo del grafico del logaritmo di base $c>1$

ESEMPI a PAG 8

es① $\lim_{n\to+\infty} \log_{10} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\log_{10} n = -\infty$

es② $\lim_{n\to+\infty} \log_2\left(\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right) = \log_2 1/2 = -1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$

es③ $\lim_{n\to+\infty} n \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty \cdot 0]$??

$n \to \infty$, $\quad 1+\frac{1}{n} \to 1$, $\quad \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$

LO VEDREMO DOMANI

Invece

es④ $\lim_{n\to+\infty} \left(\log_2(n^2-1) - \log_2(n+5)\right) = [\infty - \infty]$

I.D. $n>1 \Rightarrow$ gli argomenti dei 2 logaritmi sono $>0 \Rightarrow$

$= \lim_{n\to+\infty} \log_2\left(\frac{n^2-1}{n+5}\right) = \log_2(+\infty) = +\infty$

$\frac{n^2-1}{n+5} = \frac{n^2(1-1/n^2)}{n(1+5/n)} \to +\infty$

SUCCESSIONI ESPONENZIALI

$\{a_n^{b_n}\}$ $\qquad a_n > 0$

$a_n^{b_n} = c^{\log_c a_n^{b_n}}$ $\qquad (c>1)$

$= c^{b_n \cdot \log_c a_n}$

considero $\{a^{b_n}\}$ $\quad a>1$ $\quad \{b_n\}$ succ. qualunque

$\{b_n\} \to b \Rightarrow \{a^{b_n}\} \to a^b$

$\{b_n\} \to +\infty \Rightarrow \{a^{b_n}\} \to +\infty$ $\qquad$ non ci sono F.I.

$\{b_n\} \to -\infty \Rightarrow \{a^{b_n}\} \to 0^+$

$\{(a^{-b_n})^{-1}\} \to \frac{1}{+\infty} = 0^+$

poiché $\{a_n^{b_n}\} = \{2^{b_n \log_2 a_n}\}$, le forme di indecisione dell'esponenziale sono quelle che derivano dalle F.I. per il prodotto $[0 \cdot \infty]$:

cioè se succede che $\{b_n\} \to \pm\infty$ e $\{\log_2 a_n\} \to 0$
cioè $\{a_n\} \to 1$

oppure $\{b_n\} \to 0$ e $\{\log_2 a_n\} \to +\infty$
cioè $\{a_n\} \to +\infty$

oppure $\{b_n\} \to 0$ e $\{\log_2 a_n\} \to -\infty$
cioè $\{a_n\} \to 0+$

ATTENZIONE: non ci sono altre forme di indecisione per gli esponenziali.

Ad es. $[0^{\infty}]$ non è una forma di indecisione

Vediamo un esempio

$\{a_n\} = \{1/n\}$, $\{b_n\} = \{n^2\}$ $\Rightarrow \{a_n^{b_n}\} = \left\{\frac{1}{n^{n^2}}\right\}$

ma $\frac{1}{n^{n^2}} = \frac{1}{2^{n^2 \cdot \log_2 n}}$

Tende a $+\infty$ poiché prodotto di 2 quantità che tendono a $+\infty$
$\Rightarrow$ l'esponenziale tende a $+\infty$
$\Rightarrow$ il suo reciproco tende a 0

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{n^{n^2}}\right\} \to 0$. Invece $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right\} \to +\infty$

La cosa è vera in generale se $\{a_n\} \to 0+$ e $\{b_n\} \to +\infty$ (oppure $\{b_n\} \to -\infty$).

Similmente $[\infty^{\infty}]$ non è F.I.

ACCENNATO A LEZIONE

Mostro qui che

se $\{b_n\} \to +\infty$ e $a > 1$ allora $\{a^{b_n}\} \to +\infty$

È vero che per ogni $M > 0$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq k$ risulta

$$a^{b_n} > M \ ?$$

Ciò succede se e solo se

$$b_n > \log_a M.$$

Quindi il problema diventa: esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq k$ risulta

$$b_n > \log_a M \ ?$$

La risposta è: Sì perché $\log_a M$ o è ≤ 0 (e in tal caso non mi pongo neppure il problema) o è un numero > 0 che, poiché $\{b_n\} \to +\infty$, sarà sicuramente maggiorato da tutti i b_n per n opportunamente grande!

Similmente vedo che

se $\{b_n\} \to b$ e $a > 1$ allora $\{a^{b_n}\} \to a^b$.

Mi chiedo: è vero che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq k$ risulta

$$|a^b - a^{b_n}| < \varepsilon \ ?$$

$$\Updownarrow$$

$$|a^b| \cdot |1 - a^{b_n - b}| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{|a^b|} < a^{b_n - b} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^b} \qquad (|a^b| = a^b)$$

$$\Updownarrow$$

$$b + \underbrace{\log_a\left(1 - \frac{\varepsilon}{a^b}\right)}_{<0} < b_n < b + \underbrace{\log_a\left(1 + \frac{\varepsilon}{a^b}\right)}_{>0}$$

Chiamo δ il valore assoluto di quello che ha il val. ass. minore e cerco $k \mid \forall n \geq k \ |b - b_n| < \delta$ ....