ESERCIZIO A RICHIESTA

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$ Perché!

$\Leftarrow$ letto a rovescio è ovvio

$$\frac{n+1-2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

Ma se devo scrivere $\frac{n-1}{n+1}$ con 1 + qualcosa posso:

(A)

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+x+1}{n+1} \iff \cancel{n}-1 = \cancel{n}+x+1$$
$$x = -2$$

$$\frac{(n+1)-(2)}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

(B) (se i polinomi sono più complicati)

$$\frac{n^2-3n+1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-4)+5}{n+1} = (n-4) + \frac{5}{n+1}$$

$$\begin{array}{l|l} n^2-3n+1 & n+1 \ \text{divisore} \\ -n^2-n & \overline{n-4} \leftarrow \text{quoziente} \\ \hline -4n+1 & \\ 4n+4 & \\ \hline 5 \leftarrow \text{resto} & \end{array}$$

il resto ha grado < del grado del divisore

$$\Rightarrow n^2-3n+1 = (n+1)(n-4)+5$$

$[1^\infty]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$ F.I. delle esponenziali.

VEDI PAG 3

È vero che $\{1^n\} = \{1, \ \forall n \in \mathbb{N}\} \to 1$

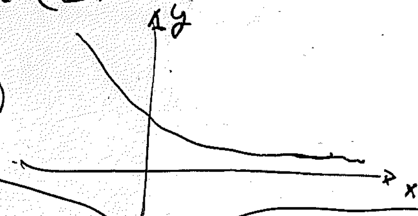
ma con $[1^\infty]$

$\boxed{\text{intendo base} \neq 1 \text{ che tende a } 1}$

Vediamo che $[0^0]$ è F.I.

$$\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{n}}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\} \to \underline{0}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\right\} \to 0 \qquad \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0^+$$



Quindi è vera forma $[0^0]$

$$\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \underset{[0^0]}{=} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \to \underline{1}$$

$$\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \underset{[0^0]}{=} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{n-1}}\right\} \to (1/2)^2 = \underline{\underline{1/4}}$$

$$\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right\} \to \underline{+\infty}$$

$$\left\{-\frac{1}{n}\right\} \to 0^-$$

Qualche ESEMPIO

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \longrightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\left\{\left(2^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \longrightarrow 2^{0} = 1$$

$$\left\{\left(2^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \longrightarrow 2^{2} = 4$$

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} \longrightarrow 2^{-\infty} = 0$$

Es. di ∞^0

Per avere esempi di 0^0 sostituire alla base 2 la base $\frac{1}{2}$.

ALTRI ESEMPI DOPO IL CONFRONTO DI ∞

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \longrightarrow \;?$$

ESEMPIO CHIAVE

- Successione crescente ....

Invece $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente....

- Successione limitata (sup. e inf.)

Quindi convergente. A un numero (che si dimostra irrazionale trascendente) che chiamo

e (NUMERO DI NEPERO)

vedi pag R11

Prime cifre decimali:

2.718281824.....

Successione crescente <u>molto</u> <u>lentamente</u>

$n=1$: 2
$n=2$: 2.25
$n=3$: $64/27 = 2.\overline{370}$
$n=4$: $625/256 = 2.44140625$
$\vdots$
$n=10$: $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.59374246$

INTERESSE COMPOSTO

$C + xC$ ← capitale a fine anno | interesse annuo x su un capitale C

$C + \frac{x}{2}C = C_1$ ← se faccio $\frac{x}{2}$ ogni 6 mesi il capitale dopo un anno è:

$$C_1 + \frac{x}{2}C_1 = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)C = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 C$$

ogni 3 mesi posso incrementare il capitale di $\frac{x}{4}$ e a fine anno il capitale è:

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^4 C$$

se ogni giorno incremento il capitale di $\frac{x}{365}$, a fine anno il capitale è

$$\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365} C$$

Cresce tanto o poco?

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \;?$$

Questo è uno dei motivi per cui può essere significativo saper calcolare il limite della succ. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Per dimostrare il teorema di NEPERO serve la DISUGUAGLIANZA di BERNOULLI, che dice che $\forall x > -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

$n = 1$ $\quad (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ $\quad$ è VERA con il segno $=$

$n = 2$ $\quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$ $\quad$ perché $x^2 \geq 0$

$n = 3$ $\quad (1+x)^3 = (1+x)^2 \cdot (1+x)$ $\quad \boxed{1+x>0}$

$$\geq (1+2x)(1+x) = 1 + 2x + x + \underbrace{2x^2}_{\geq 0} \geq 1 + 3x$$

Suppongo che sia vero

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{se } x > -1$$

Posso provare

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x$$

Questa è una dim. PER INDUZIONE

Ho provato la base dell'induzione:

$n = 2$

Ho provato che posso passare da n a $n+1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\Longrightarrow$ PRINCIPIO di INDUZ: È vero $\forall n \in \mathbb{N}$

c.v.d.

Dimostro che $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \to e$ converge.

Spezzo la tesi in due parti ... anzi 3

① $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$ monotona crescente superiormente limitata $\Longrightarrow$ converge

② $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$ monotona decrescente inf. limitata $\Longrightarrow$ converge allo stesso limite e e quindi

③ $\forall n, m: \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$

Questa doppia di disegu. dà uno strumento per approssimare e

① Dimostro che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ $\quad \underline{\forall n > 1}$

La Tesi equivale a:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n}$$

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > 0$ divido entrambi i membri della disug. per tale quantità

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \overset{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n} \iff \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

È VERA?

$-\frac{1}{n^2} > -1$ quindi posso applicare $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n} \quad \text{VERA!}$$

cioè

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente. Inoltre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Se faccio vedere che $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decresc. posso dire che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$$

VEDI PAG SUCC.

(2) Provo che $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente, cioè che

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n-\cancel{1}+\cancel{1}}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0$ divido entrambi i membri per tale quantità.

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n \geq \frac{n+1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n} \quad \text{è la tesi} \quad \text{VERA}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

(3) Relazione tra le 2 successioni

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

prendo $n \neq m$. È vero che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \ ?$$

Può succedere (A) $n < m$; ma la I succ. cresce

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

oppure:

(B) $n > m$; ma la II succ. decresce $\Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

Sì è vero. Allora:

$$2 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$$

$\Rightarrow$ entrambe le succ. sono limitate $\Rightarrow$ convergono.

Se $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e$$

Convergono allo stesso limite

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

posso approssimare "e" dando valori a n e m (appr. per difetto e per eccesso)

FINE DELLA DIM.

Uso del limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

per risolvere un limite che ieri abbiamo lasciato in sospeso.

Posso determinare

$$\lim_{n\to+\infty} n \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = ?$$ PROPR. DEI LOG

$$= \lim_{n\to+\infty} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log_2\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \log_2 e = \frac{1}{\log_e 2}$$

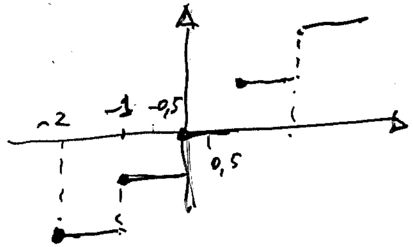
$\boxed{\log_e \alpha = \ln \alpha} = \boxed{\log \alpha}$ NUOVA SIMBOLOGIA

COMMENTO A PAG 11 FORMULA RIQUADRATA

$\lfloor x \rfloor = ?$ PARTE intera di X

BOTTOM di X

è il più grande intero $\le x$



$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$. Posso supporre $a_n \ge 1$:

$0 < \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1} \le \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}$. Poiché x^{a_n} è funz. crescente:

(*) $$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{a_n}$$

Poiché $\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^x$ è funzione crescente

(**) $$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^{a_n}$$

e poiché lo è $\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^x$ si ha anche

(***) $$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor+1}$$

Leggendo di fila le 3 disuguaglianze:

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor+1}}_{\text{è la } \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \text{ ... tende a e}}$$

$$\|$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n \rfloor+1}}_{\text{è la } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \text{ : tende a e.}} \cdot \frac{\lfloor a_n \rfloor+1}{\lfloor a_n \rfloor+2} \to 1$$

TEOREMA DEL CONFRONTO: anche la succ. "in mezzo" tende a e

E la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ a cosa tende?

E " $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$? $\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$

Allora se $\boxed{\{a_n\} \longrightarrow +\infty}$, da

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}$$

ove $\lfloor x\rfloor$ = parte intera di x, cioè il più grande intero $\le x$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO

si ricava

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$$

VEDI A PAG 10

Lo stesso se $\{a_n\}\to-\infty$

ESERCIZI Calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ove a_n è:

- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n$
- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}$ ~~VEDI PAG 13~~
- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^n$ VEDI PAG 13
- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2+1}\right)^{n^3}$ VEDI PAG 13

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boxed{e}$$

Esercizi mirati a mostrare che $[1^\infty]$ è forma di indecisione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot(-2)} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right)^{-2} = \boxed{e^{-2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} n} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-n)(-n)} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} -n} = e^{-\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = \boxed{1}$$

se $\{a_n\} \to +\infty$

La succ. $\left\{\left(1+\frac{t}{a_n}\right)^{a_n}\right\}$ $\left(\frac{t}{a_n} > -1\right)$

tende a e^t

$\{a_n\} \to \pm\infty$ $\quad \{b_n\} = \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to 0^{\pm}$

se $\{b_n\} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} (1+b_n)^{1/b_n} = e$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n^2-1}\right)^n = \qquad \left\{\frac{-3}{n^2-1}\right\} \to 0$$

$$= \underbrace{\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{-3}}}}_{\to\, e}{}^{\underbrace{\boxed{\frac{-3}{n^2-1}\cdot n}}_{\to\, 0}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3} = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n^3+n^2-1) \underline{- (n^3+n^2-1) + n^3-5n+1}}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underline{\left(1 + \frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}\right)^{\frac{n^3+n^2-1}{-n^2-5n+2}}}{}^{\cdot\, \frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}\cdot n^3}$$

$\to$ base che tende e

esponente: $\dfrac{\cancel{n^3}\,(-n^2-5n+2)}{\cancel{n^3}+n^2-1} \to -\infty$

limite della succ. : $e^{-\infty} = 0$

IN GENERALE

$$\lim_{n\to+\infty} (1+b_n)^{c_n} = e^{\lim_{n\to+\infty}(b_n\cdot c_n)}$$

ogni volta che

$\{b_n\} \to 0$

$\{c_n\} \to \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$