① Per ogni successione $\{a_n\}$ che sia divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$) risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

② Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e \qquad \left(b_n=\frac{1}{a_n}\right)$$

③ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta → DIM.:

$ln = \log_e$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1 \qquad \boxed{\ln(1+b_n)\sim b_n \text{ se } \{b_n\}\to 0}$$

APPLICO IL LOG in base e alla SUCCESS. ②

④ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n}=1 \qquad \boxed{e^{b_n}-1\sim b_n \text{ se } \{b_n\}\to 0}$$

DIM. A PAG 3

⑤ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

DIM A PAG 4

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n}=t \qquad (\forall t\in\mathbb{R})$$

$$\boxed{\text{se } \{b_n\}\to 0 :\ \forall t\neq 0 \quad (1+b_n)^t-1\sim t\,b_n}$$

LIMITI NOTEVOLI

$$\boxed{\operatorname{sen} b_n \sim b_n \text{ se } \{b_n\}\to 0}$$

DEF Dico che due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE (per $n\to+\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

$$\{b_n\}\to 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\log_e(1+b_n)^{1/b_n}=\log_e e=1$$

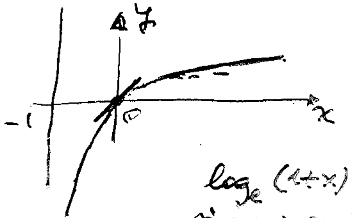
$$\|$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\log_e(1+b_n)=1 \qquad [\infty\cdot 0]$$

$$\|$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_e(1+b_n)}{b_n}=1} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

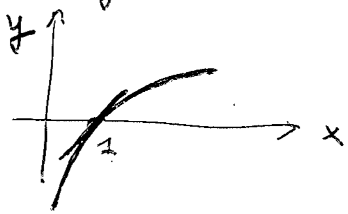
③



$\log_e(1+x)$ si avvicina a $x=0$ come x

DICE CHE:

E per traslazione; $\log_e x$



Più in generale se $\{b_n\}\to 0$, $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a(1+b_n)}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\log_a(1+b_n)^{1/b_n}=$$

$$=\log_a e.$$

④ $\{b_n\} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

perché posto: $e^{b_n}-1 = a_n \quad (\to 0)$

$$e^{b_n} = a_n + 1$$

$$\ln \downarrow$$

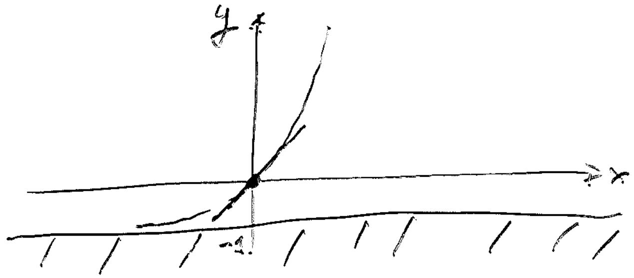
$$b_n = \ln(1+a_n)$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to 0}} \frac{a_n}{\ln(1+a_n)} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to 0}} \frac{1}{\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}} = \frac{1}{1}$$

DICE CHE

e^x-1 passa per $(0,0)$ come x.



$\Rightarrow$ per traslazione: e^x ha grafico che entra in $(0,1)$ secondo la retta di equazione

$$y = 1 + x.$$

⑤ $\{b_n\} \to 0$ (*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+b_n)^t-1}{b_n} = t \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

Questo risultato è coerente con quanto otterrei, ad esempio per $t=3$ (o per $t=k\in\mathbb{N}$) facendo lo sviluppo del binomio?

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0}} \frac{(1+b_n)^3-1}{b_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{1}+3b_n+3b_n^2+b_n^3-\cancel{1}}{b_n} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0}} 3+3b_n+b_n^2 = 3.$$

In generale se $t=k$.

$$(1+b_n)^k = \sum_{k=0}^{k} \binom{k}{k} b_n^{k-k}$$

$k=0 \quad \binom{k}{0} = 1$

$k=1 \quad \binom{k}{1} = k$

$$\Rightarrow \lim \frac{(1+b_n)^k-1}{b_n} = \lim \frac{1+k\,b_n+\dots-1}{b_n} = k.$$

(*) Dimostrazione. Pongo $a_n = (1+b_n)^t - 1$, cioè

$$(1+b_n)^t = 1+a_n \Rightarrow t\ln(1+b_n) = \ln(1+a_n)$$

Allora

$$\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n} = \frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{t\ln(1+b_n)}{\ln(1+a_n)}$$

USO 2 VOLTE il LIMITE 3 poiché $\{a_n\}\to 0$ e $\{b_n\}\to 0$

e ho la tesi

Se $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

- $\lim_{n\to\infty} n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty\cdot 0]$

eccetera....

ESEMPIO

$\lim_{n\to\infty} n\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$

$\lim_{n\to\infty} n\log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

$\lim_{n\to\infty} n^2\log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

MA ATTENZIONE AI FALSI ANALOGHI.

$\lim_{n\to\infty} n\log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) =$

- $\lim_{n\to\infty} n(\underbrace{e^{1/n}-1}_{b_n}) = [\infty\cdot 0]$

$b_n \Downarrow n = ?$

VEDI A PAG. 8

e in generale: $\lim_{\substack{a_n\to 0\\ n\to+\infty}} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1+1/n\right)^{\sqrt{2}}-1}_{b_n}\right] n = [0\cdot\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{n}}$

$\Downarrow$

$\ln(b_n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}$

VEDI A PAG. 8

$a_n = \frac{1}{n}\ \dots$

$\lim_{n\to+\infty} n\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2\cdot\frac{1}{2n}} = \left[\frac{0}{0}\right]$

(1) $= \lim_{n\to+\infty}\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \log_{10} e^{1/2} = \frac{1}{2}\log_{10} e$

$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) = [\infty\cdot 0] =$

(2) $= \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4n}{2n-1}}$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{2n-1}\cdot\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}}\right) = 2\cdot 1 = 2.$

$\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) = [\infty\cdot 0] =$

(3) $= \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{n^2\cdot\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4}{2n-1}} =$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{2n-1}\cdot\log\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n\log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) = (+\infty)\cdot\log_{10}(0^+) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

RIVISITAZIONE CON GLI ASINTOTICI:

(1) dato che $\left\{\frac{1}{2n}\right\}\to 0$ $\quad\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \log_{10}e\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \sim \log_{10}e\cdot\frac{1}{2n}$

poiché $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sim\frac{1}{2n}$

$\lim_{n\to+\infty} n\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\log_{10}e\cdot\frac{1}{2n} = \frac{\log_{10}e}{2}$

(2) $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

$= \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right) =$

$\left\{\frac{4}{2n-1}\right\} \to 0 \Rightarrow$

$\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right) \sim \frac{4}{2n-1}$

$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{4}{2n-1} = 2$

che cosa c'è dietro?

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \frac{4}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{4}}$

l'ho costruito sapendo che così ho il limite notevole

$\left\{\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}\right\} \to 1$

poiché $\{b_n\} \to 0$

(3) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right) =$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{4}{2n-1} = +\infty.$

$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} =$ (def)

$= 1.$

$\left(e^{1/n}-1 = a_n \quad 1/n = \ln(1+a_n) \quad \frac{a_n}{\ln(1+a_n)}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1\right] \cdot n = [0 \cdot \infty]$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$

SOL EX PAG 9:

$\lim_{n\to+\infty} n\left(5^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1\right) \overset{?}{=} [(+\infty)\cdot(0)]$

$= \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\ln 5 \cdot \frac{n+1}{n^2+1}}-1\right) =$

$\left\{\frac{e^{b_n}-1}{b_n}\right\} \to 1 \quad \{b_n\} \to 0$

$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \ln 5 \cdot \frac{n+1}{n^2+1} = \ln 5$ oppure ricostruendo il limite notevole

$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{e^{\ln 5 \cdot \frac{n+1}{n^2+1}}-1}{\ln 5 \cdot \frac{n+1}{n^2+1}} \cdot \frac{n+1}{n^2+1} \cdot \ln 5 =$

$\to 1$

$= \lim_{n\to+\infty} \ln 5 \cdot \frac{n^2+n}{n^2+1} = \ln 5$

ESERCIZI A CASA !!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3}=$$

ATTENZIONE! il limite non dipende dal confronto tra il grado del numeratore (e/o del denominatore) con il grado dell'esponente!

$$\lim_{n\to\infty} n\left(5^{(n+1)/(n^2+1)}-1\right)=$$ A PAG 8

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)=[\infty\cdot 0]$$

A

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{1/3}=\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{1/3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,\underbrace{\frac{\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{1/3}-1}{\frac{-2}{n^2+1}}}_{\to\frac{1}{3}}\cdot\frac{-2}{n^2+1}=-\frac{2}{3}$$

OPPURE

visto che $\left\{\frac{-2}{n^2+1}\right\}\to 0$ risulta

$$\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(\frac{n^2-1}{n^2-1}\right)^{1/3}-1\right]=\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{n^2+1}=\frac{-2}{3}$$

35.2, 35.3, 35.4, 35.5, 35.6, 35.7, ...

sul Marc Sn.

3s.2c

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(e^n)}{n} = 0 \quad \text{poiché } |\sin e^n| \le 1 \text{ e } \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$$

3s.2d

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{(\cos(1/\sqrt{n}) - 1)(\cos(1/\sqrt{n}) + 1)}{\cos(1/\sqrt{n}) + 1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\cos^2(1/\sqrt{n}) - 1}{\cos(1/\sqrt{n}) + 1} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{-\sin^2(1/\sqrt{n})}{\cos 1/\sqrt{n} + 1} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$\frac{1}{n} = \frac{1}{(\sqrt{n})^2}$ essendo $n > 0$

$\to 1$ poiché $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e $\left\{\left(\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\right\} \to 1$

$$= -\frac{1}{2}$$

(*) qui avrei potuto sostituire ~~l'asintotico~~ $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ (poiché $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \to 0$) e quindi trovare

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

3s.2g

$$\lim_{n\to+\infty} n \tan\left(\frac{5n+2}{n-n^2}\right) = \infty \cdot \tan 0 = [\infty \cdot 0] =$$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e poiché $\left\{\frac{5n+2}{n-n^2}\right\} \to 0$ per ∞

dove che $\sin\left(\frac{5n+2}{n-n^2}\right) \sim \frac{5n+2}{n-n^2}$

$\left\{\cos\left(\frac{5n+2}{n-n^2}\right)\right\} \to 1$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1} \cdot \frac{5n+2}{n-n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2}{-n^2} = -5$$

In generale se $\{b_n\} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}(b_n)}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(b_n)}{b_n} \cdot \frac{1}{\cos(b_n)} = 1$$

$\frac{\sin(b_n)}{b_n} \to 1$, $\frac{1}{\cos(b_n)} \to 1$

$$\Rightarrow \boxed{\text{se } \{b_n\} \to 0 \quad \operatorname{tg} b_n \sim b_n}$$

3s.5d

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(2^{\frac{n+1}{n}} - 2\right) = [\infty \cdot 0]$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}\left(2^{1/n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}\left(e^{\ln 2 \cdot \frac{1}{n}} - 1\right) =$$

l'esp. tende a zero $\Rightarrow$ $\left(e^{\ln 2 \cdot \frac{1}{n}} - 1\right) \sim \ln 2 \cdot \frac{1}{n}$

$$\to = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} \cdot \frac{\ln 2}{n} = 0$$

3s.6 c)

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n+1}\ln(1+e^{-n}) = [\infty\cdot 0]$$

$$\boxed{\text{poiché } \{e^{-n}\}\to 0 \quad \ln(1+e^{-n})\sim e^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{n+1}\cdot e^{-n} = e$$

3s.7 d)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+3n}\right)=[\infty-\infty]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+5n)-(n^2+3n)}{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2\underbrace{(1+\frac{5}{n})}_{\downarrow\, 1}}+\sqrt{n^2\underbrace{(1+\frac{3}{n})}_{\downarrow\, 1}}}= \qquad \sqrt{n^2}=|n|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{|n|+|n|} \underset{n>0}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2-n}-\sqrt{n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2}-\sqrt{n^2}=\lim_{n\to+\infty}2n-n=+\infty$$

perché il coeff. di n^2 nella prima radice è $\neq$ da quello nella seconda

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^3+n}-n=[\infty-\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^{3/2}-n)=\lim_{n\to+\infty}n^{3/2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)}_{1}=+\infty$$

Cioè non sempre è indispensabile eliminare la forma di indecisione che nasce da

$$\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n} \qquad \text{con } \{a_n\}\to+\infty \text{ e } \{b_n\}\to+\infty$$

andando a moltiplicare e dividere per $\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}$.

Posso in prima battuta approssimare a_n e b_n con il termine di ordine massimo di ciascuno dei due. Se hanno ordine diverso o se hanno almeno coefficienti diversi, posso accontentarmi di questa approssimazione.
Altrimenti l'approssimazione fornisce una situazione in cui la differenza è ZERO ... ma non è un vero zero.
È come lavorare con le approssimazioni decimali

posso decidere che

1.000.100 EURO e 1.000.000 EURO

sono pressapoco la stessa cosa, ma se ho un credito di 1.000.000€ e un debito di 1000.100 € ... devo far saltar fuori 100 euro, che non sono più trascurabili!
Idem se approssimo $\sqrt{2}$ con 1.4142. È vero che $\sqrt{2}-1.4142=0$?