Quadro riassuntivo sulle potenze

SUCCESSIONE POTENZA DI 2 ASSEGNATE:

$\{a_n\}$ (base: $a_n > 0$ $\forall n$) $\{b_n\}$ (esponente)

a_n	b_n	$a_n^{b_n}$	
cost. $= a \begin{cases} >1 \\ =1 \\ 0<a<1 \end{cases}$	$\to +\infty$	$\to +\infty$ $\to 1$ $\to 0+$	base costante
cost $= a \begin{cases} >1 \\ =1 \\ 0<a<1 \end{cases}$	$\to -\infty$	$\to 0+$ $\to 1$ $\to +\infty$	base costante
cost $= a > 0$	$\to b$	$\to a^b$	base costante
$\to 1$	$\lvert b_n \rvert < C$	$\to 1$	base variabile
$\to a > 0$	$\to b$	$\to a^b$	base variabile
$\to a \begin{cases} >1 \\ 0<a<1 \end{cases}$ MANCA $a_n \to 1$	$\begin{cases} \to -\infty \\ \to +\infty \end{cases}$ $\begin{cases} \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$	$\to 0+$ $\to +\infty$ $\to 0+$ $\to +\infty$	base variabile
$\to 0+$	$\to b \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ MANCA $b_n \to 0$	$\to 0+$ $\to +\infty$	base variabile
$\to +\infty$	$\to b \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ MANCA $b_n \to 0$	$\to +\infty$ $\to 0+$	base variabile

Forme di indecisione 1^∞, 0^0, ∞^0

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \operatorname{sen}\frac{3n}{n^2+1} = +\infty \cdot \sin 0 = [+\infty \cdot 0] \quad \text{F.I.}$$

$*$ $**$

lim notevole: se $\{a_n\} \to 0$ allora $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$

cioè $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$

$$\overset{*}{=} \lim_{n\to+\infty} n \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\frac{3n}{n^2+1}}{\frac{3n}{n^2+1}}}_{\to 1} \cdot \frac{3n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} = 3$$

oppure con l'asintotico

$$\overset{**}{=} \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{3n}{n^2+1} = 3$$

$\boxed{\text{FATTORIALE di } n : n!}$

$$n! = \begin{cases} n=0 : 1 \\ n=1 : 1 \\ n=2 : 1\cdot 2 \\ \text{IN GENERALE} \\ n\cdot(n-1)! \end{cases}$$

$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$

Che cosa rappresenta?
Il numero delle possibili permutazioni di n oggetti.

$\{a,b\}$: (a,b) | (b,a) 2 oggetti

$\{a,b,c\}$: (a,b,c), (c,a,b), (a,c,b) | (b,a,c), (c,b,a), (b,c,a) 3 oggetti ecc.

Tutte le forme di indecisione si possono ricondurre alla $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

① $\{a_n\} \to 0^+$ $\{b_n\} \to 0^+$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a_n}} \quad : \quad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

② $\{a_n\} \to 0^+$ $\{b_n\} \to +\infty$

$\{a_n \cdot b_n\}$ $[0 \cdot \infty]$

$$a_n \cdot b_n = \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

③ $\{a_n\} \to +\infty$, $\{b_n\} \to +\infty$

$\{a_n - b_n\}$ $[\infty - \infty]$

$$\| \quad a_n \cdot \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right)$$ nel caso peggiore $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} \to 1$

$[\infty \cdot 0]$ e quindi $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$: $a_n^{b_n} = e^{b_n \log_e a_n}$

derivavano dal fatto che l'esponente (pensando la base costante) presenta F.I. $[\infty \cdot 0]$

Quindi faremo confronti di infiniti / infinitesimi sempre sotto forma di rapporto.

Confronti di infiniti e di infinitesimi

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dico che $\{a_n\}$ è un infinitesimo

$= +\infty$, $= -\infty$ $\Big]$ dico che $\{a_n\}$ è un infinito

Esempi $\{\log_c n\}$ (con $c>1$ (o anche $0<c<1$: tende a $-\infty$)), $\{\sqrt{n}\}$, $\{n^3\}$, $\{3^n\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \ell \text{ finito} \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ hanno = ordine di infinito} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine sup. risp. a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ SONO NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

Se sono infinitesimi la terminologia si ribalta. (VEDI PAG 5)

In particolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_c n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall c>1 \text{ e } \forall \alpha>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0 \qquad " \qquad "$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad \forall c>1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Gli ultimi confronti si basano sul TEOREMA (CRITERIO del RAPPORTO)

se $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{a_n\} \to 0 \qquad \{b_n\} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ è INFINITESIMO DI ORDINE SUPER. rispetto a } \{b_n\} \\ \ell \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono infinitesimi dello STESSO ORD} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

$\{b_n\} = \{1/n\} \to 0$

$\{a_n\} = \left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\operatorname{sen} n}{n}}{\frac{1}{n}} = \operatorname{sen} n$$

: il limite del rapporto non esiste $\Rightarrow$ le 2 succ. sono infinitesimi non confrontabili

---

Confronto di infiniti. PRIMI ESEMPI:

(1) $a_n = n^\alpha, \quad b_n = n^\beta \qquad \alpha, \beta > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta} = \begin{cases} \alpha > \beta & : n^\alpha \text{ è di ord. SUP} \\ \alpha = \beta & \boxed{n^0 = 1} \ \text{= ORD} \\ \alpha < \beta & : n^\alpha \text{ è INF. di ordine INFERIORE} \end{cases}$$

(2) $\{a_n\} = \{a^n\} \qquad \{b_n\} = \{b^n\} \qquad a > 1, \ b > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} a > b & \{a^n\} \text{ è INF di ORD. SUPER. risp a } \{b^n\} \\ a = b & \text{sono dello stesso ord.} \\ a < b & \{a^n\} \text{ è inf. di ord. inf. risp } \{b^n\} \end{cases}$$

(3) $\{a_n\} = \{\log_a n\} \qquad \{b_n\} = \{\log_b n\} \qquad a, b > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a b \, \log_b n}{\log_b n} = \log_a b$$

sono infiniti dello stesso ordine di grandezza.

PROBLEMA: confrontare tra loro

logaritmi, potenze, esponenziali...

fattoriali

VEDI RISULTATI A PAG 4

E LA VERIFICA A PAG 7-8

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0 \qquad \begin{matrix}\alpha > 0 \\ c > 1\end{matrix}}$$

ESEMPIO nel caso particolare $\alpha = 3$, $c = 2$

Faccio vedere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$$

applico il criterio del rapporto:

$$a_n = \frac{n^3}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad c > 1}$$

ESEMPIO con $c = 2$. Provo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

con il criterio del rapporto:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{n!\,(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

perché:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{(n!)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

oppure

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}}_{\to e}\Bigg]^{\overbrace{\frac{n}{-(n+1)}}^{\to -1}} \to e^{-1}$$

Applico il Criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 .$$ Dunque

$n!$ è INFINITO di ORD. SUP. a e^n

di ORD. INF a $e^{n \ln n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1/3}+n^{1/6}}{n^{1/2}+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/3}\underbrace{\left(1+n^{-1/6}\right)}_{\to 1}}{n^{1/2}\underbrace{\left(1+n^{-1/2}\right)}_{\to 1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{1/3-1/2} = \lim_{n\to+\infty} n^{-1/6} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} =$$

o cerchiamo di adattare il confronto $\frac{n^\alpha}{c^n}$ già fatto a questo caso oppure lo calcoliamo con il criterio del rapporto. Osservo che basta considerare $\frac{n^3}{e^{n/2}}$ poiché

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}}{e^{n/2}}$$

$$a_n = \frac{n^3}{e^{n/2}} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{e^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{e^{n/2}}{n^3} = \frac{1}{e^{1/2}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

con il criterio del rapp. quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^{n/2}} = 0$.

Se invece voglio adattare il confronto $\frac{n^\alpha}{c^n}$ a un caso più generale posso dire che:

Se $\{a_n\}\to+\infty$ e $c>1$, $\alpha\geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n)^\alpha}{c^{a_n}} = 0$$ (Rifare il ragionamento a inizio PAG7)

Ora riprendo il limite $\frac{n^3}{e^{n/2}}$ riconducendolo alla forma $\frac{(a_n)^3}{e^{a_n}}$:

$a_n = \frac{n}{2}$ $\qquad n = 2a_n$ e quindi

$$\left\{\frac{n^3}{e^{n/2}}\right\} = \left\{8\underbrace{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3}{e^{n/2}}}_{\to 0}\right\} \to 8\cdot 0 = 0$$

MA ATTENZIONE A "GENERALIZZARE"!

$$\left\{\frac{n^3}{e^{1+\ln n}}\right\} = \left\{\frac{n^3}{e\cdot n}\right\} = \left\{\frac{n^2}{e}\right\} \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log_{10} n)^5 + 5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n-1} - 20} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\log_{10} n)^5\left[1+5\frac{(\ln n)^4}{(\log_{10} n)^5}\right]}{\sqrt[10]{n-1}\underbrace{\left[1-\frac{20}{\sqrt[10]{n-1}}\right]}_{\to 1}}$$

$\ln^4$ è inf. di ordine INF. e quindi trascurabile rispetto a $\log_{10}^5$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_{10} n)^5}{\sqrt[10]{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_{10} e)^5 (\ln n)^5}{\sqrt[10]{n\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}}} =$$

$$= (\log_{10} e)^5 \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^5}{n^{1/10}} = (\lg_{10} e)^5 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{1/50}}\right)^5$$

$$= (\lg_{10} e)^5 \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0 \quad \text{LIMITE NOTO}} \qquad \boxed{\sqrt[10]{n} = n^{1/10}}$$

In generale

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to+\infty}} \frac{[\ln(a_n)]^\beta}{a_n^\alpha} = 0 \qquad \begin{array}{l} \beta > 0 \\ \alpha > 0 \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\Bigg]^{\boxed{\frac{1}{n}\cdot \ln n} \to 0} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 + n\ln n}{n^2+1}\right)^n = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n\ln n - 1}{n^2+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to+\infty} n\cdot \frac{n\ln n - 1}{n^2+1}} = e^{+\infty} = +\infty,$$

poiché $\lim \frac{n^2 \ln n - n}{n^2+1} = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} (n-1)^{\frac{1}{n}\cdot \ln n} = [\infty^0]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot \ln n} = ? \qquad e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)(\ln(n-1))}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n/2}} = +\infty$$

Infatti se applico il criterio del rapporto a

$a_n = \frac{n^{n/2}}{n!}$ e quindi $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}$

ottengo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}}}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^{n/2}} =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}_{\to e^{1/2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{1/2}}}_{\to 0} \longrightarrow 0 < 1$$

Quindi $\left\{\frac{n^{n/2}}{n!}\right\} \longrightarrow 0^+$ (criterio del rapporto e osservo che NUM. e DEN. sono sempre >0) $\Rightarrow$

$\left\{n!/n^{n/2}\right\} \longrightarrow +\infty$