ESERCIZIO A RICHIESTA

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = ? \qquad (+\infty)\,(1-1) : [\infty\cdot 0]$$

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{-\operatorname{sen}^2\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}+1} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(-\operatorname{sen}^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = \frac{\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}}{1/\sqrt{n}}\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

$\boxed{\text{APPLICANDO oppure GLI ASINTOTICI}}$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{se } n\to+\infty$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cdot\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = 0$$

Posso approssimare con asintotici solo prodotti e rapporti. Ad es.:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

se usassi l'asintotico $\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (poiché $n\to+\infty$)

e sostituissi troverei

$$\lim \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1 \quad \text{MA NON È VERO}$$

Un'approssimazione migliore di $\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ è

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \qquad \text{(CREDETECI!)}$$

$\Longrightarrow$ al numeratore $-\frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3} = \frac{5}{6n^3}$

$\Longrightarrow$ il limite vale $\frac{5}{6}$

Per mettere in evidenza il problema posso scrivere che

$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ equivale a dire che

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad \boxed{o\left(\tfrac{1}{n}\right) \text{ o piccolo di } 1/n}$$

vale a dire: ciò che trascuro scrivendo $1/n$ invece di $\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0$$

Definizione di "o piccolo"

Dico che una successione $\{a_n\}$ è "o piccolo" di una successione $\{b_n\}$ e scrivo $a_n = o(b_n)$

se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

FATTO da tenere presente

$$\boxed{a_n \sim b_n \iff a_n = b_n + o(b_n)}$$

Infatti $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{\underline{\frac{a_n}{b_n}}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

sono asintotiche!

$\Leftarrow$ ripercorrere le disug. nel verso opposto.

LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano: (a,b) un qualunque intervallo (anche illimitato: $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$);

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funz. reale di variab. reale;
- $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$;
- $c\in(a,b)$ oppure $c=\infty$ oppure $c=-\infty$; → ma in c la funzione potrebbe anche non essere def.

Allora si dice che al tendere di x a c la funzione $f(x)$ tende al limite ℓ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ che tende a c la successione $\{f(x_n)\}$ tende a ℓ

Es. So che per ogni $\{x_n\}\to 0$ si ha $\left\{\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right\}\to 1$

Quindi $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ATTENZIONE. Non basta 1 successione:

se $x_n = \pi n$ $\{\operatorname{sen} x_n\} = \{0\} \to 0$

ma $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste!

Infatti se si prende la succ. di term. generale

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\{\operatorname{sen} x_n\} \to 1 \neq 0.$$

Definizione analoga nel caso della divergenza (sostituire ℓ con $+\infty$ o $-\infty$)

Limiti notevoli visti per successioni

Per $\{a_n\} \to 0$ allorché $n \to +\infty$:

0) $\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$; $\{\cos a_n\} \to 1$; $\{\operatorname{tg} a_n\} \to 0$

1) $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1 \implies \operatorname{sen} a_n \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

2) $\left\{(1+a_n)^{1/a_n}\right\} \to e$ NEPERO

3) $\left\{\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right\} \to 1 \implies \ln(1+a_n) \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

4) $\left\{\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\} \to 1 \implies e^{a_n}-1 \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

5) $\left\{\dfrac{(1+a_n)^t-1}{a_n}\right\} \to t \implies (1+a_n)^t - 1 \sim t a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

Per $\{a_n\} \to +\infty$ allorché $n \to +\infty$

1) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$ $\leftarrow$ (VALIDO ANCHE SE $\{a_n\}$ DIVERGE A $-\infty$)

2) $\left\{\dfrac{\ln(a_n)}{a_n^{\beta}}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

3) $\left\{\dfrac{a_n^{\beta}}{e^{a_n}}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

- Possibilità di ricavare limiti analoghi con basi $\neq e$ ....
- Ricordare le regole algebriche di calcolo e le regole sulle succ. del tipo $\{\ln(a_n)\}$
- Applicare a $\{a_n^{b_n}\}$ $\longrightarrow$ $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$

Limiti notevoli funzioni

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$; $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$; $\lim_{x \to 0} \tan x = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^t - 1}{x} = t$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\alpha > 0 \\ \beta > 0\end{pmatrix}$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\beta}}{e^x} = 0 \qquad (\beta > 0)$

Vedremo strumenti per passare da limiti noti riguardanti

$x \to +\infty$

$x \to 0$

a limiti per $x \to -\infty$

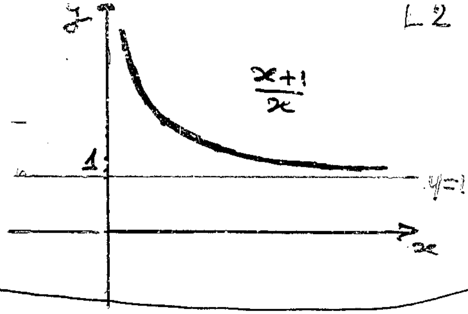
$x \to c \neq 0$

Esempi.

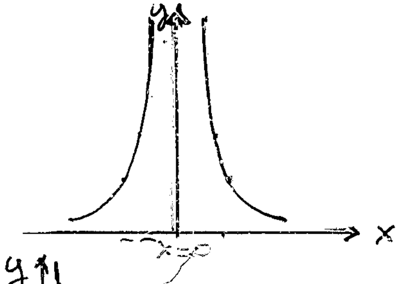
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

anzi $\frac{x+1}{x}$ tende a 1 dal di sopra

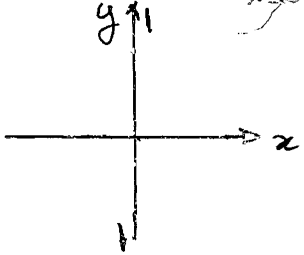
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1^+$



2. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$



3. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = ?$



Limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA (o da SINISTRA) .... VEDI DEF A PAG 9

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

Limite per eccesso (o per difetto) ....

Asintoti: se la funzione tende a comportarsi come una retta:

per $x\to c$ finito: se $\lim_{x\to c^+} f(x)=+\infty$ (o ... segni assortiti)
ASINTOTO VERTICALE

per $x\to c$ infinito: se $\lim_{x\to c} f(x)=l\neq\infty$: ORIZZONTALE

se $\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty$: ? OBLIQUO

$\lim_{x\to c} f(x) = l^+$

$f(x)$, per x che tende a c, tende al limite finito l dal di sopra

Significa

$$\boxed{\forall \{x_n\}\to c \text{ si ha } \{f(x_n)\}\to l^+_{\text{da destra}}}$$

Cioè, se c è finito:

$\forall \{x_n\}$ tale che $\forall \varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n\geq k: |x_n-c|<\varepsilon$

si ha che anche

$\{f(x_n)\}$ è tale che $\forall \eta>0\ \exists h\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n\geq h$

$0<f(x_n)-l<\varepsilon$

se c è $+\infty$ (o analogamente per $-\infty$):

$\forall \{x_n\}$ tale che $\forall M>0\ \exists k\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n\geq k: x_n>M$

si ha che

$\{f(x_n)\}$ è tale che $\forall \eta>0\ \exists h\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n\geq h$

$0<f(x_n)-l<\varepsilon$

Invece $\lim_{x\to c} f(x)=l^-$ significa

$\forall \{x_n\}\to c$ si ha $\{f(x_n)\}\to l^-$ (da sinistra o parlando del limite della funzione DAL DI SOTTO)

Dico che

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \ell \quad \text{finito o infinito}$$
$$(c \text{ finito!})$$

(leggo limite per x che tende a c da destra di $f(x)$ è ℓ)

se $\forall \{x_n\} \to c+$ si ha

$$\{f(x_n)\} \to \ell$$

: si prende in esame solo una parte di successioni $\{x_n\}$. Quindi può esistere il limite per x che tende a c da destra senza che esista il limite per $x \to c$. NON il viceversa.

da destra = per eccesso
da sinistra = per difetto

$\{x_n\} \to +\infty$ $\qquad \dfrac{2^{x_n}}{x_n} \longrightarrow +\infty$

quindi per $x \to +\infty$ $\quad 2^x$ e x non hanno lo stesso ordine di ∞ $\Rightarrow$ 2^x non potrà avere l'andamento di una retta.

Prima di mettersi a cercare un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$) bisogna accertarsi che l'ordine di infinito della funzione sia lo stesso dell'ordine di infinito di x.

Asintoto obliquo

Può succedere che ci sia solo se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)$$

[oppure

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty) \,]$$

È una retta non parallela a nessuno dei 2 assi.

$\Rightarrow$ equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$

e tale che la distanza tra il punto

$P \equiv (x, f(x))$ del grafico di f

e il punto $Q \equiv (x, mx+q)$ della retta

tenda a 0 quando $x \to +\infty$ [oppure a $-\infty$]

Come lo cerco?

(1) Controllo che sia [illegible] per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$)

Se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(2) Controllo che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$) sia $+\infty$ oppure $-\infty$

se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(3)(*) Esiste ed è finito e $\neq 0$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\left(\text{o} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}\right)$?

se non esiste o non è finito o è $= 0$: L'ASINTOTO NON C'È.

Altrimenti chiamo m questo limite e passo a:

(4) Esiste ed è finito $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$?

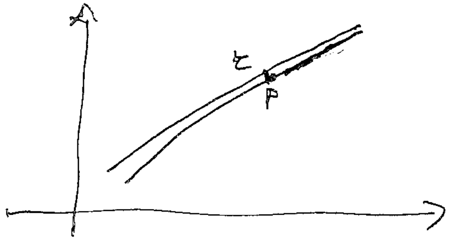
Se non esiste o non è finito: L'ASINTOTO NON C'È

Altrimenti chiamo q questo limite.

Ho così trovato l'asintoto obliquo:

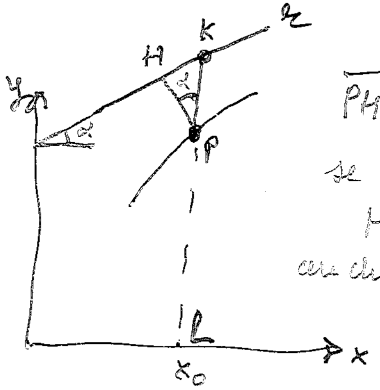
$$y = mx + q.$$

(*) La risposta SÌ a questo punto significa che $f(x)$ ha lo stesso ordine di ∞ di una retta (...cioè ordine 1).



La distanza dei punti del grafico dalla retta asintoto per $x \to +\infty$ tende a zero

Poiché:



$\overline{PH} = \overline{PK} \cos\alpha$

se $\overline{PK} \to 0$ per $x \to +\infty$ anche $\overline{PH} \to 0$

basta chiedersi:

$$\left| \underbrace{f(x_0) - (m x_0 + q)}_{\overline{PK}} \right| \xrightarrow{?} 0$$

$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ I.D. $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} = 1$$

$|x| = x$ poiché $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1\cdot x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{|x|+x} =$$

$x>0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x} = 1/2$$

$\Rightarrow$ asintoto è per $x \to +\infty$ $\boxed{y = 1\cdot x + \frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{x}_{\downarrow -\infty} = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x| - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x-x} = -1/2$$

asintoto per $x \to -\infty$ ha equazione

$$y = -1\cdot x - 1/2$$

$f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \implies$$ non può esserci asintoto

---

$f(x) = x + \ln x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

non $\exists\, q$

$\implies$ non c'è l'asintoto anche se $x + \ln x$ e x hanno lo stesso ordine di infinito