① $$\lim_{n\to+\infty}\left(n^{2/3}-(n-1)e^{1/n}\right) = +\infty-(+\infty)e^{0}=[\infty-\infty] \text{ F.I.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(n^{2/3}-n e^{1/n}+\underbrace{e^{1/n}}_{\downarrow\, 1}\right) = \lim_{n\to+\infty} -n\underbrace{\left(\underset{\downarrow\,1}{e^{1/n}}-\underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{n^{1/3}}}\right)}_{1} = -\infty$$

② $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{-n}+\sqrt{n}+(\ln n)^4}{n^3-2^n} = \frac{0+\infty+\infty}{\infty-\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ F.I.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{(\ln n)^4}{\sqrt{n}}\right)\to 1}{-2^n\left(1-\frac{n^3}{2^n}\right)\to 1} = -\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0^-$$

③ $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)^{n^2+\sqrt{n}} = \left[1^{\infty}\right] \text{ F.I.} =$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{(n^2+\sqrt{n})\ln\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)} = e^2$$

all'esponente $\sim (n^2+\sqrt{n})\left(\frac{2}{n+n^2}\right) \sim \frac{2n^2}{n^2} \to 2$

④ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n^{4/3}-2^{2n}} = \frac{\infty}{\infty-\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ F.I.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{-2^{2n}\left(1-\frac{n^{4/3}}{2^{2n}}\right)\to 1} = -\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2^2}\right)^n = 0^-$$

⑤ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{-n}-n^{5/4}}{2^{-3n}} = \frac{0-\infty}{0^+} = -\infty$$

ESERCIZI ASSEGNATI (E RISOLTI) IN AULA.

ESERCIZIO 3 RISPIEGATO.

TENER PRESENTE CHE
$$a_n^{b_n} = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n \ln a_n}$$

$$\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)^{n^2+\sqrt{n}} = e^{(n^2+\sqrt{n})\ln\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)} \longrightarrow e^{\lim (n^2+\sqrt{n})\ln\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sqrt{n})\ln\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right) = [\infty\cdot 0]$$

$$\left\{\frac{2}{n+n^2}\right\}\to 0 \implies \ln\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)\sim\frac{2}{n+n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sqrt{n})\cdot\frac{2}{n^2+n} =$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2\left(1+1/n\sqrt{n}\right)\to 1}{n^2\left(1+1/n\right)\to 1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2}$$

ALTERNATIVA: RISCRIVERE IL TERMINE n-ESIMO COSÌ:

$$\left[\underbrace{\left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)^{\frac{n+n^2}{2}}}_{\to e}\right]^{\frac{2}{n+n^2}\left(n^2+\sqrt{n}\right)}$$

LIMITE DI NEPERO

3

ESERCIZIO A RICHIESTA

$$\lim_{n\to+\infty} (n^4+1)\left(1-\cos\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} (n^4+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{n^2}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\,\frac{n^4+1}{n^4} = \frac{9}{2}$$

tener presente l'asintotico $1-\cos a_n \sim \frac{1}{2}a_n^2$ per $\{a_n\}\to 0$

PROVATO QUI SOTTO

Sia $\{a_n\}\to 0$ per $n\to+\infty$.

Allora $1-\cos a_n =$

$$= \frac{(1-\cos a_n)(1+\cos a_n)}{1+\cos a_n} = \frac{1-\cos^2 a_n}{1+\cos a_n} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a_n}{1+\cos a_n}$$

È vero che $\dfrac{\operatorname{sen}^2 a_n}{1+\cos a_n} \sim \dfrac{1}{2}a_n^2$? Sì

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{a_n\}\to 0}} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 a_n}{1+\cos a_n}}{\frac{1}{2}a_n^2} = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{a_n\}\to 0}} \frac{(\operatorname{sen} a_n)^2}{a_n^2}\cdot\frac{2}{1+\cos a_n} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{a_n\}\to 0}} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right)^2}_{\downarrow\ 1^2}\cdot\underbrace{\frac{2}{1+\cos a_n}}_{\downarrow\ \frac{2}{2}} = 1$$

CALCOLO dei LIMITI di funzione

INGREDIENTI :
1) OPERAZIONI SUI LIMITI
2) LIMITI FONDAMENTALI (da SUCCESSIONI)
3) TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

1. OPERAZIONI SUI LIMITI

Sia $c \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ ed esistano

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \ell'$ (ℓ, ℓ' eventualm. infiniti)

(1) $\lim_{x\to c} f(x)\pm g(x) = \ell\pm\ell'$ ... salvo forma di indecisione $[\infty-\infty]$

(2) $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \ell\cdot\ell'$ ... salvo forma di indecisione $[0\cdot\infty]$

(3) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ purché $g(x)\neq 0$ in tutti i punti di un intorno di c, diversi da c e purché $\ell'\neq 0$.

ATTENZIONE AL CASO $\frac{\ell}{0}$: se $\lim_{x\to c} g(x) = 0^+$ ... (oppure 0^-)

Se invece $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ senza verso ... e $\ell\neq 0$ il limite non esiste

FORME DI INDECISIONE : $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

LIMITI DI FUNZ. COMPOSTE.

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; $g:(a',b')\to\mathbb{R}$ con $f(a,b)\subseteq(a',b')$ (a, b, a', b' eventualmente infiniti) e sia f non costante.(*) Se

$\lim_{x\to c} f(x) = c'$ (con $c'\in(a',b')$) e

$\lim_{t\to c'} g(t) = \ell$

allora $\lim_{x\to c} g(f(x)) = \ell$

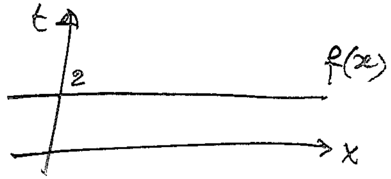
(*) Se $f(x)$ è costante possono succedere brutte cose (PAG 5)

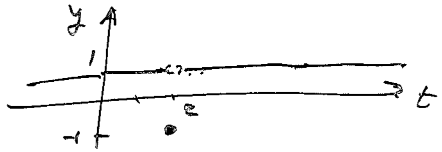
es. $f(x) = 2$; $g(t) = \begin{cases} 1 & t\neq 2 \\ -1 & t=2 \end{cases}$ $\Rightarrow g(f(x)) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(f(x)) = -1$.

INVECE $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ e $\lim_{t\to 2} g(t) = 1$

$f(x)=2$

$g(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\neq 2\\ -1 & \text{se } t=2\end{cases}$





$\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{x\to 0} g(2) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

$\lim_{t\to 2} g(t) = 1$

DEFINIZIONE DI

Funzione f continua in un punto $x_0\in(a,b)$, ove (a,b) è contenuto nell'insieme di definizione di f

$$f:\underset{\overset{\cup}{x_0}}{(a,b)}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Si dice che f è continua in $x_0\in(a,b)$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Per rendere più esplicita questa definizione conviene osservare che la funzione $f(x)$ ha limite per $x\to x_0$ se e solo se ha limite per $x\to x_0^+$ e per $x\to x_0^-$ e i due limiti coincidono.

Quindi $f(x)$ è continua in $x_0\in(a,b)$ se e solo se

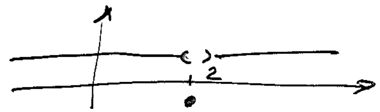
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Quindi $f(x)$ può non essere continua,

perché:

A) il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ma è $\neq f(x_0)$

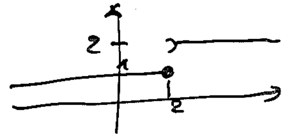
discontinuità eliminabile



$\lim_{x\to 2} 1 = 1$

ma $f(2)=-1$

B) il limite da sinistra (o da destra) non coincide con $f(x_0)$



oppure posso dire:

disc. di 1ª specie

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

C) il limite può non esistere

disc. di 2ª specie

$$f(x)=\begin{cases}1/x & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste $\Rightarrow$ non continua

$$f(x)=\begin{cases}1/x^2 & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

disc. a salto illimitato (caso B o C ?)

2. LIMITI FONDAMENTALI

(A) Sia $f(x)$ una delle funzioni (elementari)

$$x^\alpha, \quad a^x, \quad \log_a x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos x$$

e sia c un numero appartenente all'I.D. di $f(x)$ (•)

Allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0+ & \text{se } \alpha<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0+ & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \cancel{\alpha=0} \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0+ & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0+ & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases} \qquad x=-t, \ t\to+\infty \quad \lim_{t\to+\infty} \underbrace{a^{-t}}_{\left(\frac{1}{a}\right)^t} = \begin{cases} \vdots \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE (idem per $x \to -\infty$ e per $\cos x$)

Applicando il teorema sui limiti di funz. composte

si ha se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$: $\lim_{x\to c} a^{f(x)} = a^\ell$, $\lim_{x\to c} \log_a f(x) = \log_a \ell$

(•) Merita attenzione il caso x^α con α reale >0

Il suo ID è $[0,+\infty)$ ma non si può calcolare $\lim_{x\to 0} x^\alpha$ (per $x<0$ la funzione non è definita). Però

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0^\alpha = 0.$$

La situazione è più semplice per α intero...

Più in generale, se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \ell'$

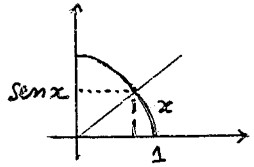
(c, ℓ, ℓ' eventualmente infiniti)

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \ell^{\ell'}$$

Forme di indecisione $[\infty^0], [0^0], [1^\infty]$: evidenziate scrivendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

e ricordando la forma di indecisione del prodotto.

(B) • $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



• NEPERO e conseguenze:

$$\lim_{x\to+\infty} (1+1/x)^x = e = \lim_{x\to-\infty} (1+1/x)^x$$

$$\lim_{z\to 0\pm} (1+z)^{1/z} = e = \lim_{z\to 0} (1+z)^{1/z}$$

$$\lim_{z\to 0\pm} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1 = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^t-1}{x} = t \quad \text{per ogni } t \text{ reale}$$

• CONFRONTO di INFINITI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha>0, \ \forall \beta>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \forall \alpha>0, \ \forall a>1$$

• CONFRONTI TRA INFINITI E INFINITESIMI DELLO STESSO TIPO

vedi es. a pag 9 e 10

per $x \to 0^+$ $\qquad -\ln x \longrightarrow +\infty$

$\qquad\qquad\qquad x^{-1/2} \longrightarrow +\infty$

quale di questi infiniti ha ordine superiore?

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} -x^{1/2}\ln x = [0\cdot\infty]$$

si noti l'uso della "sostituzione per reciprocità"

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ t \to +\infty \end{array}}$$

$t^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$

Ricordo che:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t^{1/2}}\cdot \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t^{1/2}}(-\ln t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$$

$\Rightarrow$ per $x\to 0^+$, $-\ln x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $x^{-1/2}$

Quindi ATTENZIONE: nel caso di limiti di funzioni possono esistere infiniti o infinitesimi anche per x che tende a quantità diverse da $+\infty$

E quindi si deve parlare di INFINITO PER x CHE TENDE A....

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{3x-\pi}{\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3\cdot\pi/3-\pi}{\mathrm{sen}(\pi/3-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3} = t \\ x = t+\frac{\pi}{3} \end{array}} = \lim_{t\to 0}\frac{3t+\cancel{\pi}-\cancel{\pi}}{\mathrm{sen}\, t} =$$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{t}{\mathrm{sen}\, t} = 3$$

ESEMPIO DI CONFRONTO DI INFINITESIMI PER X CHE TENDE A UN NUMERO $\neq 0$.

$3x-\pi$ e $\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo!

Si noti l'uso della sostituzione "per traslazione"

$$x-\frac{\pi}{3} = t$$

(Sostituire significa operare una composizione invertibile)