$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+7} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}|n| + o(n) - \sqrt{2}|n| = [\infty-\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n^2-n)-(2n^2+7)}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{2n^2+7}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n-7}{\sqrt{2}\,n+\sqrt{2}\,n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n-7}{2\sqrt{2}\,n} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)} - \sqrt{2n^2\left(1+\frac{7}{2n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2n^2}}_{\downarrow\ \infty} \left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{2n}}}_{\downarrow\ 1} - \underbrace{\sqrt{1+\frac{7}{2n^2}}}_{\downarrow\ 1}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] =$$

$$(1+b_n)^{1/2}-1 \sim \frac{1}{2}b_n \quad \text{se } \{b_n\}\to 0$$

$$\Longleftrightarrow (1+b_n)^{1/2}-1 = \frac{1}{2}b_n + o(b_n)$$

$$\Longleftrightarrow (1+b_n)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}b_n + o(b_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\,n\left(-\frac{1}{4n}-\frac{7}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-n\ln(1+n)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} - \ln(1+n) = 0-(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2-5n} - 2n = \lim_{n\to+\infty} 2\cancel{|n|}+o(n)-\cancel{2n} =$$

$$[\infty-\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\cancel{4n^2}-5n)-\cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2-5n}+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5n}{4n} =$$

$$= -5/4$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt{n+9n^2}\right) - \ln n = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{n+9n^2}}{n}\right) = \ln 3 \text{ poiché}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{9n^2+n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3|n|\sqrt{1+1/9n}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n}\sqrt{1+\frac{1}{9n}} = 3$$

VEDI COMMENTO ULTIMA PAGINA **NEW!**

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{9n^2+n} - \sqrt{n^2-2n} = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 3|n| - |n| = \lim_{n\to+\infty} 2|n| = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0}\Big(\underbrace{\ln(1+n^2)}_{\downarrow\, +\infty}+\underbrace{e^{-2n}}_{\downarrow\, 0}\Big) = [0\cdot\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n^2}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$$ poiché $\ln n$ è ∞ di ordine inferiore a n^α $\forall \alpha>0$

3. TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

(Sottocaso del discorso sul limite di funzioni composte)

È talora utile applicare le seguenti sostituzioni $\boxed{t=-x}$ oppure $\boxed{t=1/x}$ oppure $\boxed{t=x-a}$

La prima trasforma limiti per $x\to-\infty$ in limiti per $t\to+\infty$; la seconda trasforma limiti per $x\to0+$ in limiti per $t\to+\infty$ e viceversa; la terza trasforma i limiti per $x\to a$ in limiti per $t\to0$

ESEMPI

VEDI PAG SUCCESS.

- $\lim_{x\to0^+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} =$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{-t} =$

- $\lim_{x\to\pi/3}\frac{3x-\pi}{\sin(x-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{t=x-\pi/3}{=} \lim_{t\to0}\frac{3t}{\sin t} =$

- $\lim_{x\to0^+} x(e^{1/x}-1) = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}(e^t-1) =$

  $= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}(1-e^{-t}) =$

- $\lim_{x\to0^-} x(e^{1/x}-1) \overset{t=-1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}(e^{-t}-1) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t} =$ Qui non c'è indecisione, ma si vede meglio così

- $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x = [\infty-\infty]$ Si può risolvere direttamente. Oppure: $t=-x$

$$= \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t^2+2t}-t = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+2t-t^2}{\sqrt{t^2+2t}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{|t|+t} =$$

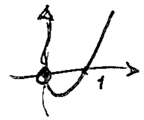
$$\underset{\substack{t>0\\ \text{poiché}\\ t\to+\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{t+t} =$$

Esempi di sostituzioni $t=1/x$, $t=-x$

$t = \frac{1}{x}$ $\qquad x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$



$t = -x$ $\qquad x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{-t} = 0^-$$

poiché $\ln(1+t) = \ln t + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}_{\sim \frac{1}{t} \to 0}$

ESERCIZI:

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{1/x} - 1\right) = [0\cdot\infty] = \boxed{\frac{1}{x} = t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} - \underbrace{\frac{1}{t}}_{0} = +\infty$$

poiché e^t è ∞ di ord. sup. a t.

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{0}\underbrace{\left(e^{1/x} - 1\right)}_{0-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} + x = \boxed{x=-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \sqrt{t^2+2t} - t = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{t^2} + 2t - \cancel{t^2}}{\sqrt{t^2+2t} + t} = 1$$

LIMITI NOTEVOLI, ASINTOTICI e APPROSSIMAZIONI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x\cdot\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

per $x\to 0$ la funzione $\tan x$ è asintotica a x

per $x\to 0$ $\quad \operatorname{sen} x$ è " a x

per $x\to 0$ $\quad \ln(1+x)$ " a x

per $x\to 0$ $\quad e^x - 1$ " a x

per $x\to 0$ $\quad (1+x)^t - 1$ " a tx $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

APPROSSIMAZIONI DA USARE SE si sostituisce in una SOMMA:

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= x + o(x) \\ \operatorname{sen} x &= x + o(x) \\ \ln(1+x) &= x + o(x) \\ e^x &= 1 + x + o(x) \\ (1+x)^t &= 1 + tx + o(x) \end{aligned}\right] \text{ se } x \to 0$$

ove $f(x) = o(g(x))$ per $x\to c$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$

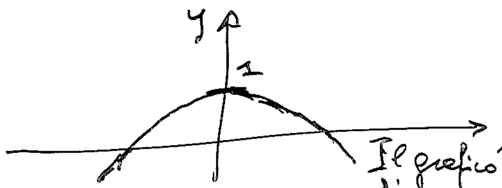
$$=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow \quad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per $x\to0$

APPROSSIMAZ. da usare nelle somme



Il grafico di $\cos x$ vicino a $P(0,1)$ è circa quello della parabola $y=1-\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\left[\begin{array}{c} x=\tan t \\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2} \\ \text{se } x\to0 \\ t\to0\end{array}\right]=\lim_{t\to0}\frac{\arctan(\tan t)}{\tan t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=1$$

$\arctan x \sim x$ per $x\to0$

$\arctan x = x+o(x)$ Approssimazione da usare nelle somme

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\sin(1-x)}{(\ln x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\boxed{\begin{array}{c} x-1=t \\ x\to1 \Rightarrow \\ t\to0\end{array}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-t)\sin(-t)}{[\ln(1+t)]^2}=\lim_{t\to0}\frac{t\sin t}{(\ln(1+t))^2}=$$

$\boxed{\text{per } t\to0 \quad \sin t\sim t \;,\; \ln(1+t)\sim t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot t}{(t)^2}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x+x^2\ln x}{\ln(1+x)}=\frac{0+(0\cdot\infty)}{0}\to\left[\frac{0}{0}\right]$$

$\lim_{x\to0}x^2\ln x = \left(\lim_{x\to0}x\right)\left(\lim_{x\to}x\ln x\right)=0\cdot0$

$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{2}=0}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\underbrace{\left(1+\frac{x^2\ln x}{2x}\right)}_{\to1}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\ln(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x}=2$$ poiché $\ln(1+x)\sim x$ per $x\to0^+$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+2\ln(1-x)}{x^2-2e^x} = \frac{1+0}{0-2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

FUNZIONE CONTINUA (e in part. def. in $x=0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+x}{2(e^x+x)} = \frac{0+0}{2\cdot(1+0)} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^4} = \frac{1-1}{0^4} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \boxed{\begin{array}{l} x-1=t \\ t\to 0 \end{array}} \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{(\ln(t+1))^4} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) - \cancel{1}}{(t)^4} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1/2 + o(1)}{t^2} =$$

quantità che tende a zero

$$= -\frac{1}{2} \cdot +\infty = -\infty \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\tan[2(4-x)]}{x-4} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan(-2t)}{t} = -2$$

$$\boxed{x-4=t}$$

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{e^{2x-1}-1}{2x^2-x} = \frac{e^0-1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \boxed{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t \\ t\to 0 \end{array}} \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot 2t} = \boxed{\begin{array}{l} \text{per } t\to 0 \\ e^{2t}-1 \sim 2t \end{array}}$$

$x(2x-1)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cancel{t}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)2\cancel{t}} = 2 \qquad \frac{1}{\left(0+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\ln(1+e^x) = (-\infty)\cdot 0 \quad [0\cdot\infty]$$

$$\overset{\Delta}{=} \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \boxed{x=-t} \lim_{t\to+\infty} (-t)e^{-t} =$$

$$\boxed{\ln(1+e^x) \sim e^x \quad \text{per } x\to -\infty}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

ATTENZIONE: se sostituendo l'asintotico sparisce la F.I. si è fatto un errore. La F.I. deve SOLO risultare più semplice da esaminare.

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=\infty\left(e^{0^-}-1\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\boxed{x=-t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-1/t}-1}{-\frac{1}{t}}=1$$

Oppure $e^{1/x}-1\sim\frac{1}{x}$ per $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1$$

commento all'ultimo esercizio di pag. 2

Nella prima versione pubblicata mancava la conclusione del limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt{n+9n^2}\right)-\ln n=\ \dots$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{n+9n^2}}{n}\right)=$$

Peraltro non si POTEVA intendere che questo limite fosse uguale a quello scritto nella riga successiva:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+9n^2}}{n}\right)=\dots\qquad=3$$

perché mancava prima di quest'ultimo simbolo di limite il segno di uguaglianza.

Questo è un AVVISO di CAUTELA NELLA NOTAZIONE:

Se scrivete $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-6n}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2-6n)-n^2}{\sqrt{n^2-6n}+n}=$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-6n}{\sqrt{n^2-6n}+n}=-3$$

a rigore io devo interpretare le due righe come due limiti diversi accostati, poiché manca "=" qui