$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-7x^2+2x+3}{4x^2-7x-15} = \frac{2\cdot 27-7\cdot 9+9}{4\cdot 9-21-15} = \frac{0}{0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x-3=t \\ x=t+3 \\ t\to 0 \end{array}} = \lim_{t\to 0} \frac{2(t+3)^3-7(t+3)^2+2t+6+3}{4(t+3)^2-7t-21-15} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^3+18t^2+54t+54-7t^2-42t-63+2t+9}{4t^2+24t+\cancel{36}-7t-\cancel{36}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}(2t^2+11t+14)}{\cancel{t}(4t+17)} = \frac{14}{17}$$

MEGLIO: se $f(x)=2x^3-7x^2+2x+3$ è tale che $f(3)=0$ significa che $f(x)$ è divisibile per $(x-3)$. Analog. per il denom.

Vado a dividere num e den. per $x-3$
Uso il <u>metodo di Ruffini</u>

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & & 6 & -3 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$0 \leftarrow$ resto nella divis. di $f(x)$ per $x-3$

$\underbrace{2 \quad -1 \quad -1}_{\text{coeff. dei term. di g. } 2,\,1,\,0}$

Quoziente $2x^2-x-1$

$\Rightarrow \quad f(x)=(x-3)(2x^2-x-1)$

$g(x)=4x^2-7x-15$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 4 & -7 & -15 \\ 3 & & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow g(x) = (x-3)(4x+5)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2x^2-x-1)}{(x-3)(4x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-x-1}{4x+5} = \frac{18-3-1}{17} = \frac{14}{17}$$

$$\lim_{x\to -\infty} |x|^k \ln(2e^x+1) \underset{[\infty\cdot 0]}{=} \quad \text{con } k>0$$

$e^x \to 0$ per $x\to -\infty$

$\ln(2e^x+1) \sim 2e^x$ per $x\to -\infty$

$$= \lim_{x\to -\infty} |x|^k \cdot 2e^x = [\infty\cdot 0] = \boxed{x=-t}$$

$$= \lim_{t\to +\infty} |-t|^k\, 2e^{-t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{2t^k}{e^t} = 0$$

FUNZIONI CONTINUE (a, b eventualmente ∞)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice continua in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Significa: A PICCOLE VARIAZIONI di x corrispondono PICCOLE VARIAZIONI di $f(x)$.

Si dice continua da sinistra in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Es. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ VEDI

Idem da destra: $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice <u>continua su</u> $[a,b]$ (con a, b finiti)
> se f è continua in ogni $c \in (a,b)$
> continua da destra in a
> da sinistra in b

<u>Tipi di discontinuità</u>

0) ELIMINABILE. Es. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$

1) di prima specie o a salto (modellizzano fenomeni con bruschi salti. Es. $f(x) = [x]$

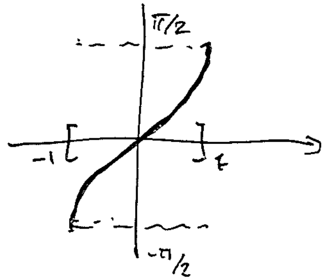
$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

2) di seconda specie. Es. $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

se $\lim_{x \to c^+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to c^-} f(x)$ non esistono o sono uguali a $\pm\infty$

ESEMPIO

$f(x) = \operatorname{arcsen} x$



$\forall x_0 \in (-1,1)$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0$

$\lim_{x \to -1^+} \operatorname{arcsen} x = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ la funzione è continua $\forall x_0 \in (-1,1)$ ed è continua da destra in $x_0 = -1$ e da sinistra in $x_0 = 1$

DIRÒ CHE $f(x)$ <u>è continua su</u> $[-1,1]$!

$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua dove?

$\forall x_0 \in (-\infty, 0)$ oppure $\in (0, +\infty)$ $f(x)$ è continua, in quanto composizione di funzioni continue:

$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

$\lim_{t \to t_0} e^t = e^{t_0}$ se $t_0 = \frac{1}{x_0}$

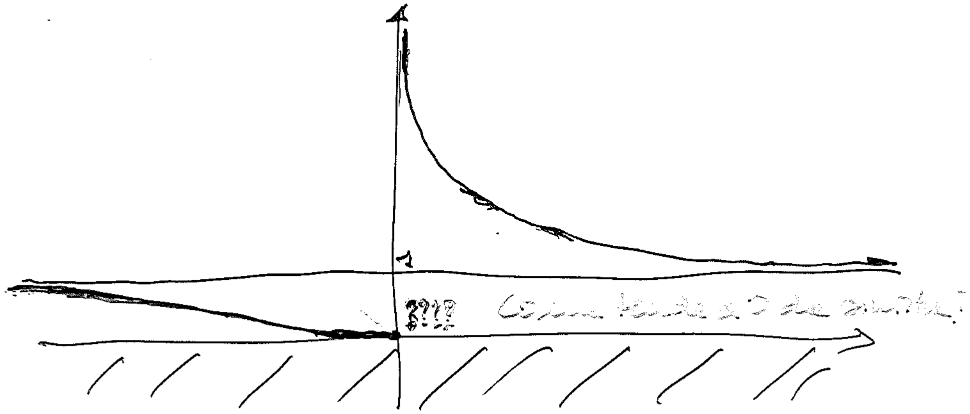
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} e^{1/x} = e^{1/x_0}$.

E per $x = x_0$? $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è cont. da sinistra in $x_0=0$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{0^+} = 1^+ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{1/x} = e^{0^-} = 1^-\end{array}\right\}$$ asintoto orizzontale di eq. $y=1$

$1/x$ è decrescente su $(-\infty,0)$
e su $(0,+\infty)$

se compongo con e^t che è crescente
ho funz decresc. su $(-\infty,0)$ e su $(0,+\infty)$.

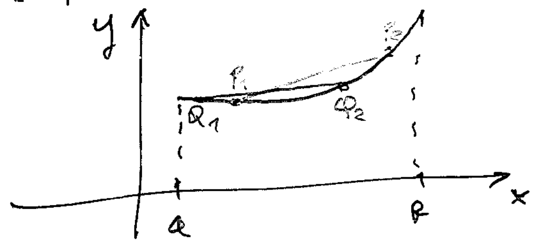
VEDREMO CHE $f(x)$ È CONCAVA in un intervallo $(-\infty,a)$ con $a<0$ ma CONVESSA in $(a,0)$ poiché tende a 0 pressapoco come $y=0$ (vedi grafico)

Dico che la funzione

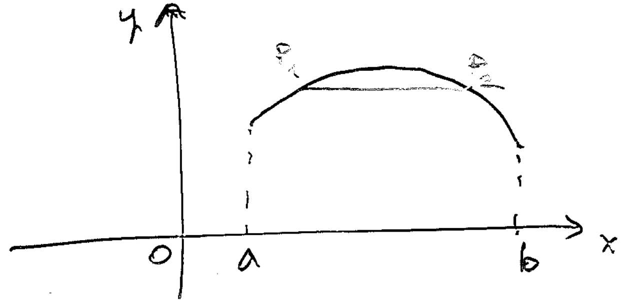
$$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

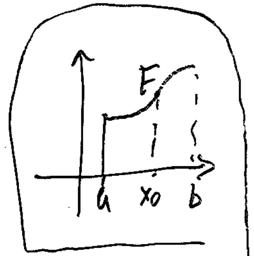
(a,b) potrebbe anche essere chiuso o illimitato a ds, a sinistra.

è convessa in (a,b) se
per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in (a,b)$
si ha che il segmento che congiunge
i punti $P_1=(x_1, f(x_1))$ e $P_2=(x_2, f(x_2))$
giace sopra il grafico della funzione



concava .... sotto





se $x_0 \in (a,b)$ è tale che $f(x)$ è convessa (o viceversa) in (a,x_0) e concava in (x_0,b) dirò che x_0 è un punto di flesso e il punto $(x_0,f(x_0))$ lo chiamo FLESSO

Proprietà delle funzioni continue

f, g continue in c $\Rightarrow$ $f \pm g$ continua in c
$f \cdot g$ " "
f/g " " se $g(c) \neq 0$

$\frac{f}{g}$ non è def. in c.

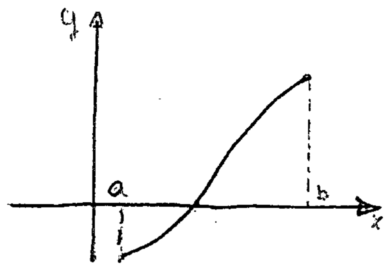
$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \;\;\text{"}\;\;\text{"}\; f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continua in c.

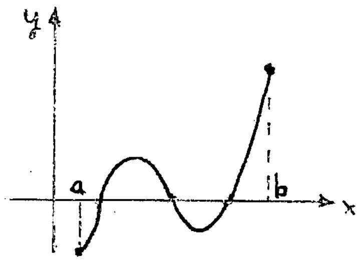
Esempi di funzioni continue (a parte quelle elementari):

- polinomi
- razionali fratte ....
- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ (con $f(x) > 0$)

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

TEOREMA degli ZERI. Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a)f(b)<0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$





Con il METODO DI BISEZIONE

Dim. Consiste nella costruzione di una successione $\{c_n\}$ di punti di (a,b) CONVERGENTE a UNO ZERO di f.

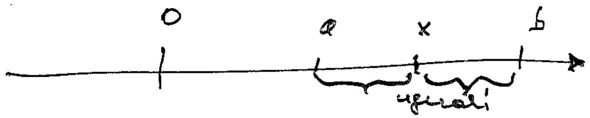
1°) $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c_1) = 0$ STOP;
altrimenti se $f(a)f(c_1) < 0$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c_1$
se $f(b)f(c_1) < 0$ " $a_1 = c_1$, $b_1 = b$

nell'esempio iniziale la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ dato che $g(x) = (x-3)(4x+5)$ sarà definita e continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ diversi da $x_0 = 3$ e $x_0 = -5/4$

cioè $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua nei singoli intervalli

$(-\infty, -5/4)$, $(-5/4, 3)$, $(3, +\infty)$

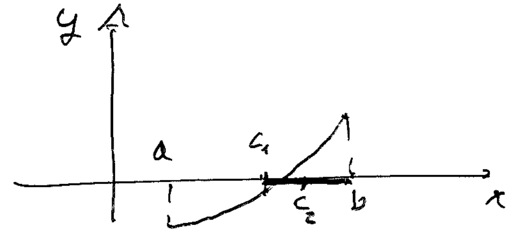
Calcolo del punto medio del segmento (a,b)



Cerco x tale che

$x - a = b - x$
$2x = a + b$
$x = \frac{a+b}{2}$

Per questo pongo $c_1 = \frac{a+b}{2}$: voglio che sia il punto medio di (a,b)



ESITO GRAFICO DEL 1° PASSO

Riparto dall'intervallo $[a_1, b_1]$, per il quale valgono le ipotesi viste per $[a, b]$. Quindi

2°) $c_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(c_2) = 0$ STOP;

altrimenti ITERO : $a_2 = \dots$ $b_2 = \dots$

Continuando così si ha una coppia di successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ t.c.

I) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$: successioni MONOTONE

la prima ~~CRESCENTE~~ non decrescente Superiormente limitata da b

la seconda ~~DECRESCENTE~~ non crescente inferiormente limitata da a

II) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

III) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

IV) f è una funz. continua in ogni punto di (a, b)

Da I) si deduce $\{a_n\} \to l_1$, $\{b_n\} \to l_2$ per $n \to \infty$

Da II) si deduce che $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

Da IV) " $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ PER DEF. di LIMITE

Da III) e dal teor. della permanenza del segno si deduce

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \longrightarrow (f(l))^2 \leq 0$$

.... cioè $f(l) = 0$, cioè l è lo zero cercato

Questo è un metodo di calcolo (approssimato) degli zeri : necessita però di una LOCALIZZAZIONE precisa degli zeri. Ed è un metodo lungo.

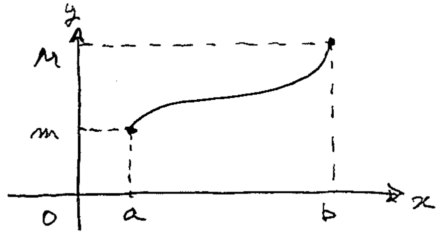
TEOR. DEGLI ESTREMI (Weierstrass). f continua su $[a, b] \Longrightarrow$

i) f è limitata su $[a, b]$

ii) f è dotata di massimo e di minimo ASSOLUTI in $[a, b]$.

cioè ...

VEDI PAG 10



M è MAX assoluto, ma non MAX RELATIVO

m è min. assoluto, ma non min RELATIVO

Dico che M è MASSIMO ASSOLUTO per la funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R},$$ insieme qualunque, eventualmente intervallo.

se esiste in A un punto x_0 tale che

$$f(x_0) = M$$

e per ogni $x \neq x_0$ in A risulta

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Cioè se M è MASSIMO per l'insieme immagine della funzione.

Similmente MINIMO ASSOLUTO .....

$$\dots f(x) \geq f(x_0)$$

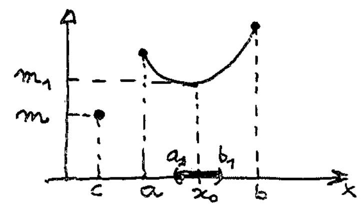
Differenza con MAX e min RELATIVI ?

Dico che M è un MASSIMO RELATIVO per la funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}$$

se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$ e esiste un intervallo aperto $(a_1, b_1) \subseteq A$ che contiene x_0 tale che $\forall x \in (a_1, b_1)$ si abbia

$$f(x) \leq f(x_0)$$



Similmente MINIMO RELATIVO ....

$$\dots f(x) \geq f(x_0)$$

$f : \{c\} \cup (a, b) \to \mathbb{R}$; m = minimo ASS. non rel. ; m_1 min REL non min ASS.