ESERCIZI ASSEGNATI

1

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+e^{-2n}\right)=[\infty\cdot 0]$$

$=$

$\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ (cioè $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$)

lo posso sostituire
all'interno della somma ricordando
che cosa si trascura

$$=\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+e^{-2n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n+n^2\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)+\underbrace{\boxed{\frac{n^2}{e^{+2n}}}}_{\to 0}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n+o\left(\frac{n^2}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$$

Perché $n^2\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=o(n)$? Per definizione:

$o\left(\frac{1}{n}\right)=a_n$: succ. t.c. $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=0$

$n^2 o\left(\frac{1}{n}\right)=n^2 a_n$

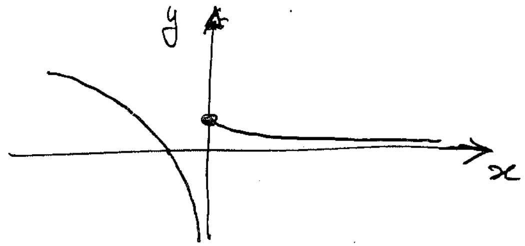
$$0=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 a_n}{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 a_n}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{n^2 a_n=o(n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}}}_{\to e}\right]^{3}=e^3$$

Stabilire in quali punti è continua la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x) & \text{se } x<0\\ 1 & \text{se } x=0\\ e^{-x} & \text{se } x>0\end{cases}$$



Già dal grafico capisco che $f(x)$ è cont. in ogni $x_0\in[0,+\infty)$ (da destra) e $x_0\in(-\infty,0)$
non cont. in $x_0=0$

e^{-x} è funz. composta di funz. cont.: $x\xrightarrow[-()]{}-x\xrightarrow[e^{()}]{}e^{-x}$ $\Rightarrow f(x)$ è cont. $\forall x_0\in(0,+\infty)$

$\ln(-x)$ è funz. comp. di funz. cont.

$x\xrightarrow[-()]{}-x\xrightarrow[\ln()]{}\ln(-x)$ $\Rightarrow f(x)$ è cont. in ogni $x_0\in(-\infty,0)$

ma $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\ln(-x)=-\infty$!

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{-x}=1=f(0)$$

$f(x)$ è continua da destra in $x_0=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan \ln x}{1-x} & \text{se } 0<x<1\\[2ex] ax-a^2 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Stabilire se esistono valori di $a\in\mathbb{R}$ tali che $f(x)$ sia continua in ogni $x_0\in(0,+\infty)$ o in caso negativo in quali punti è continua.

Se $x_0\in(0,1)$ la funz. $f(x)$ è def come rapporto con $1-x$ (che in $(0,1)$ è continua è diversa da 0) della funzione $\tan(\ln x)$ che è definita per

$\ln x \neq -\frac{\pi}{2} - k^2\pi$ (negativo poichè $\ln x$ varia in $(-\infty,0)$)

cioè $x\neq e^{-\pi/2-k^2\pi}$.

Questa funzione non essendo definita in alcuni punti di $(0,1)$ non può essere continua in tutto $(0,1)$ e quindi anche il rapporto non è continuo in $(0,1)$.
Però su ogni intervallo della forma $\left(e^{-3\pi/2-k^2\pi}, e^{-\pi/2-k^2\pi}\right)$ lo è in quanto il num. è composto di funzioni continue

$$x \xrightarrow[\ln()]{} \ln x \xrightarrow[\tan()]{} \tan(\ln x)$$

Se $x_0\in(1,+\infty)$ $\quad f(x)=ax-a^2$ sempre cont. (polinomio!)

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to1^+} f(x)\ ?$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\tan\ln x}{1-x} = a-a^2 = \lim_{x\to1^+} ax-a^2$$

$\forall a\in\mathbb{R}$

$\left[\frac{0}{0}\right]$?

$\boxed{x-1=t}$ $\Rightarrow \lim_{t\to0^-}\frac{\tan\ln(1+t)}{-t}$

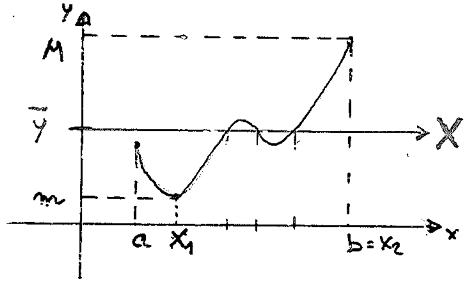
$\boxed{\ln(1+t)\sim t \text{ poichè } t\to0}$

$\lim_{t\to0^-}\frac{\tan t}{-t} = -1$

$\Longrightarrow$ cont. in $x_0=1$ se $\boxed{a-a^2=-1}$ $\boxed{a=\frac{1\pm\sqrt5}{2}}$

TEOR. dei VALORI INTERMEDI. f continua in $[a,b]$

Per ogni valore $\bar y$ compreso tra il minimo m e il max M esiste un $\bar x\in[a,b]$ tale che $f(\bar x)=\bar y$.



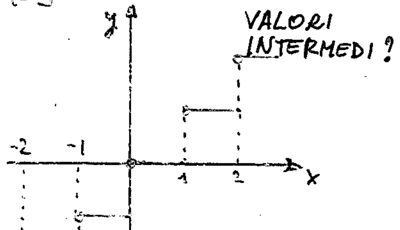
Infatti: se $g(x)=f(x)-\bar y$; $m-\bar y=g(x_1)<0$; $M-\bar y=g(x_2)>0$

$\Rightarrow g(x_1)g(x_2)<0$; g è cont. in $[a,b]$ $\Rightarrow$ vale teor. degli zeri $\Rightarrow$

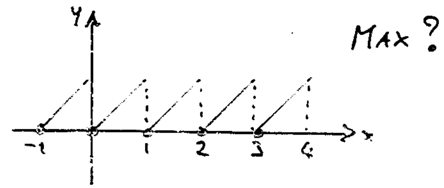
$\Rightarrow \exists\ \bar x\in[x_1,x_2]$ t.c. $g(\bar x)=0$ e quindi $f(\bar x)=\bar y$

Si utilizza per provare il TEOR della MEDIA INTEGRALE.

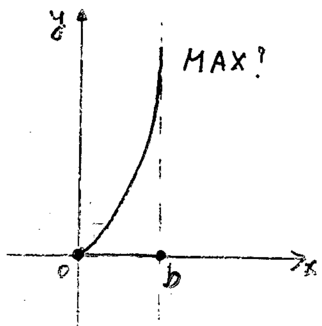
ATTENZIONE. Questi risultati non valgono in generale per funzioni non continue in almeno un punto di $[a,b]$



$f(x)=[x]$



$f(x)=x-[x]$

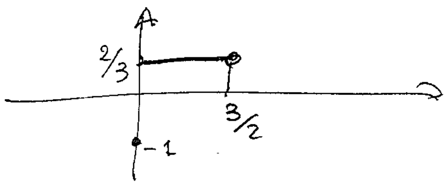


Ma anche se cade qualche altra ipotesi:

es. $f(x)=x^2$ def. su $\mathbb{R}$....
cont. su $\mathbb{R}$
non ha MAX
poichè l'intervallo è illimitato

Teor. degli zeri - Controesempi

se tolgo la continuità



in $[0, \frac{3}{2}]$ la funz. non è cont. (disc. in $x_0=0$)

$f(0) = -1$
$f(3/2) = 2/3$ } $f(0)f(3/2)$ è <0

ma non ci sono zeri

Intervallo di def. chiuso:

altrimenti non so chi siano $f(a)$ e $f(b)$.

Intervallo limitato

altrimenti manca almeno uno dei due estremi in cui calcolare $f(a)$, $f(b)$

(eventualmente devo restringere il dominio per applicare il teorema)

Ad es. $f(x) = x^3 - x + 1$ ha zeri?

è definita su $\mathbb{R}$.

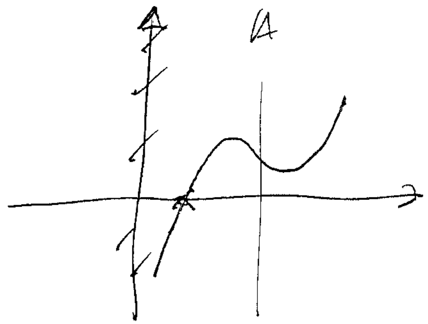
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

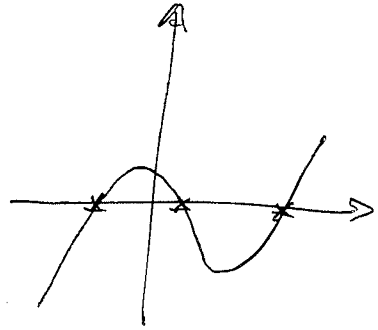
posso rendere $f(x) > M > 0$ pur di prendere x abbastanza grande $\Rightarrow \exists\, b$ t.c. $f(b) > 0$

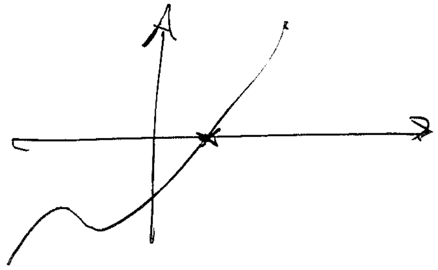
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

posso rendere $f(x) < -M < 0$ pur di prendere x abbastanza "piccolo" (eventualm. molto <0) $\Rightarrow \exists\, a$ t.c. $f(a) < 0$

$\Rightarrow$ visto che $f(x)$ è continua c'è almeno 1 zero. Quanti?







In quale caso siamo? Risponderemo con lo Studio di funzione

Vogliamo determinarne almeno 1

$f(x) = x^3 - x + 1$

per applicare il T.d.Z. osservo che

$f(0) = 1 > 0$

$f(-2) = -8 + 2 + 1 < 0$

$\Rightarrow$ uno zero è compreso tra -2 e 0

Metodo di bisezione $(a_0 = -2,\ b_0 = 0)$

$c_1 = -1 \qquad f(-1) = 1 > 0$

$\Rightarrow a_1 = -2,\ b_1 = -1 \qquad (f(-2)f(-1) < 0)$

Metodo di bisez.

$c_2 = -3/2 \qquad f(-3/2) = -\frac{27}{8} + \frac{3}{2} + 1 < 0$

$a_2 = -3/2 \qquad b_2 = -1 \qquad (f(-3/2)f(-1) < 0)$

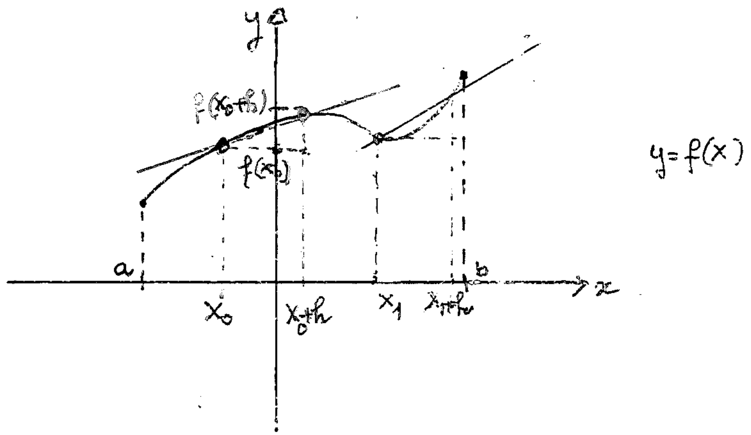
$c_3 = -5/4 \qquad f(-5/4) = -\frac{125}{64} + \frac{5}{4} + 1 > 0$

$a_3 = -3/2 \quad b_3 = -5/4$ lo zero cade in qs interv. che ha ampl. $1/4$

ecc.

DERIVATA di una funz. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in $x_0\in(a,b)$

Problema della VARIAZIONE della variabile dipendente in relazione alla variazione della variabile indipendente



TASSO DI VARIAZIONE MEDIA di $f(x)$ rispetto a x:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Viene anche detto RAPPORTO INCREMENTALE

Geometricamente è il coefficiente angolare della retta congiungente $(x_0,f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$

Quando h diventa molto piccolo, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ PUÒ RAPPRESENTARE molto bene la pendenza del grafico di $f(x)$ in prossimità di $(x_0,f(x_0))$. PRECISANDO:

se esiste ed è finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice che f è derivabile in x_0 e il limite viene detto derivata di f in x_0 e denotato con $f'(x_0)$.

equazione della retta per il punto $P\equiv(x_0,y_0)$ e coeff. ang. m.

La retta che cerco non è // asse y quindi avrà la forma

$$y = mx + q.$$

ma passa per P e quindi le coord. di P soddisfano l'eq.:

$$y_0 = mx_0 + q$$

Sottraggo membro a membro

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

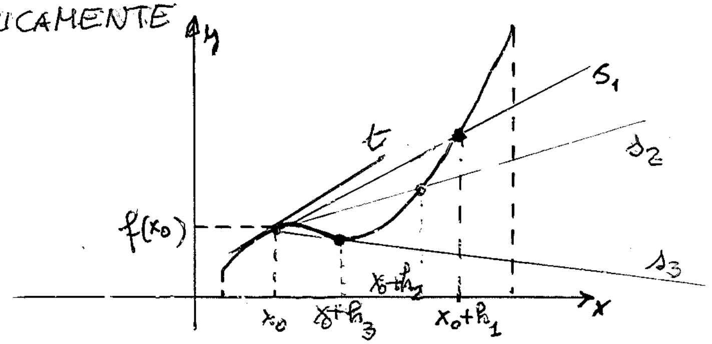
$\Longrightarrow$ eq. della tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ se la $f(x)$ è derivabile in x_0 è per definizione

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

AGGIUNGERE A PAG 9

GEOMETRICAMENTE



la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta t "TANGENTE" in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

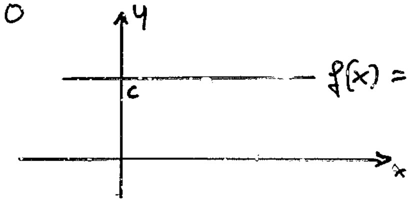
limite delle secanti passanti per $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico: sua equazione? $\longrightarrow$ pag 8

(al tendere a zero di h)

ESEMPI.

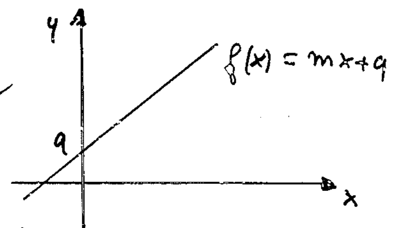
1. $f(x) = c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = c \\ f(x_0) = c \end{array}\right| \Rightarrow \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$



2. $f(x) = mx+q$ $(m, q \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = m$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = m\cdot(x_0+h)+q \\ f(x_0) = mx_0+q \end{array}\right| \Rightarrow \frac{mh}{h} = m$$



3. bis $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$ poiché:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

VEDI PAG 11

3. $f(x) = x^3$ $x = x_0$

$f(x_0+h) = (x_0+h)^3$ $f(x_0) = x_0^3$

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} =$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

$$\lim_{h \to 0} 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 = 3x_0^2 = f'(x_0)$$

Di solito mi ricordo questo risultato dicendo: "La derivata di x^3 è $3x^2$"

Vuol dire che la funzione $f(x) = x^3$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e posso quindi costruire una funzione (di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) che associa ad ogni x_0 la derivata prima di x^3 calcolata in x_0:

$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

Questa funzione la chiamo "funzione derivata di $f(x)$"

Esistono funzioni semplici che in almeno un punto del loro dominio non sono derivabili! VEDI 3bis, 4, 5 PAG 11, 12

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x_0+h) = \sqrt[3]{x_0+h}$ $\qquad f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0}\left(\sqrt[3]{\frac{x_0+h}{x_0}} - 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0}}{x_0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{h}{x_0}} - 1}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

è un numero se $x_0 \neq 0$

$\Longrightarrow$ se $x_0 \neq 0$ $\sqrt[3]{x}$ è derivabile

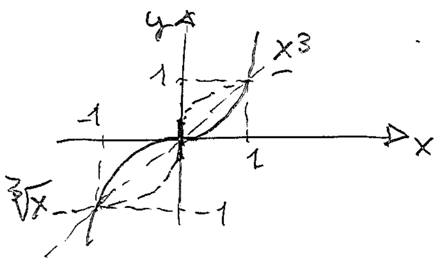
$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/3} - 1}{t} = \frac{1}{3}}$$

Se $x_0 = 0$

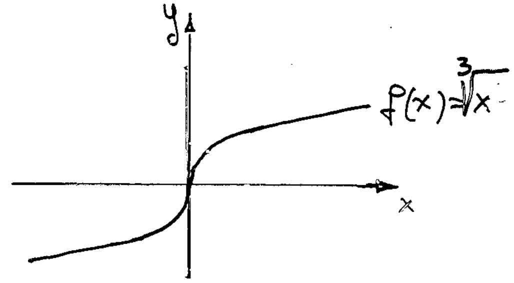
Riprendo il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

la derivata non c'è.



Ma la tangente esiste ed è l'asse y.
(il grafico è simmetrico di quello di x^3 rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante)

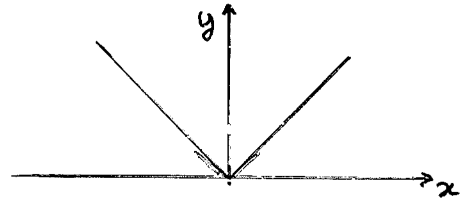


ATTENZIONE: in $(0,0)$ esiste comunque la tangente al grafico: $x=0$

4. $f(x) = |x|$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

non esiste poiché è $\neq$ da DS e da SIN



Derivata destra di $f(x)$ in x_0: esiste se esiste finito

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad : f'_+(x_0)$$

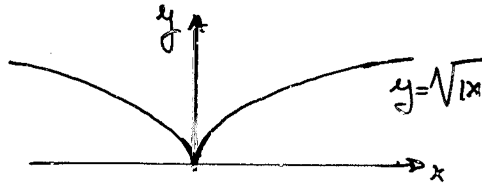
Idem: derivata sinistra : ..... $: f'_-(x_0)$

Quindi $|x|$ ha in $x_0 = 0$ derivata destra e " sinistra } DIVERSE

Parlo di punti angolosi. ∀ A ∀▷ A A
Tra la "tangente da sinistra" e quella "da destra" si forma un angolo $\alpha \in (0,\pi)$

Invece cuspidi se $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (oppure $\mp\infty$). ESEMPIO 5

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{0}}{h} = \pm\infty$$

$\frac{\sqrt{|h|}}{|h| \operatorname{sgn} h}$

tra le 2 tangenti l'angolo misura 0.