A RICHIESTA

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}2(x-1)}{x-1} & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ \dfrac{e^{x-1}-1+(x-1)^a}{\ln x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

in quali $x \in \mathbb{R}$ è continua in dipendenza dal parametro reale a ?

Se $x \in (-\infty, 1)$ $\quad f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} 2(x-1)}{x-1}$

rapporto di funz. continue

$x-1$: somma di funz. cont.

$2(x-1)$: prodotto di " "

$\operatorname{sen}(t)$: funz cont $\Rightarrow$ componendo con la funz. continua $2(x-1)$ ho f. cont.

$\Rightarrow$ Num. cont.
Den. cont e $\neq 0$ $\Big| \Rightarrow$ la frazione è continua

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{t\to 0^-\\ t=x-1}} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t} = 2 = f(1)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è cont. da sinistra in 1

Se $x \in (1,+\infty)$ $\quad f(x)=\dfrac{e^{x-1}-1+(x-1)^a}{\ln x}$

essendo $x>1$ la base della potenza è >0 $\Rightarrow$ la fct. è definita e $\ln x > 0$ e in part. $\neq 0$ $\Rightarrow$ fcn. definita

e^{x-1} è cont. in quanto composta di $x-1$ e e^t che sono continue

-1 è cont.

$(x-1)^a$ è cont

---

somma di funz. cont è cont. $\Rightarrow$ NUM cont.

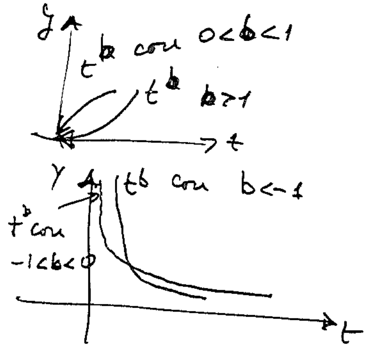
Denom. : $\ln x$ è cont. e sempre $\neq 0$ in $(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{N}{D}$ è cont. in ogni punto di $(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1+(x-1)^a}{\ln x} = \boxed{\begin{matrix}x-1=t\\ t\to 0+\end{matrix}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t-1+t^a}{\ln(1+t)} = \boxed{\begin{matrix}t\to 0\\ \ln(1+t)\sim t\end{matrix}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{t^a}{t}\right) = \begin{cases} 1+0=1 & a-1>0\\ 1+1=2 & a-1=0\\ 1+\infty = +\infty & a-1<0\end{cases}$$



se $a=1$ la funz è cont anche da destra e quindi è cont. in $x=1$

se $a>1$ presenta una disc. di prima specie

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ FINITO}$$

se $a<1$ presenta una disc. di II specie perché $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ è infinito.

Calcolo la derivata di e^x in $x=x_0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{h}-1)}{h}=e^{x_0}$$

$\Rightarrow (D e^x)_{x=x_0}=e^{x_0}$

$\Rightarrow (e^x)'=e^x$

cioè la derivata della funz. esponenziale di base e coincide con la funzione →

ciò significa che è una soluzione dell'equazione differenziale $y'=y$. Vedremo tra poco che anche ke^x lo è e, a fine corso, che queste sono le sole soluz.!

Calcolo la derivata di $\ln x$ in $x=x_0\in(0,+\infty)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}$$

$\Rightarrow (D\ln x)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$

$\Rightarrow (\ln x)'=\frac{1}{x}$

REGOLE di CALCOLO

Ingredienti:
1. DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI
2. TEOREMI di DERIVAZIONE

1. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Denotando con $Df(x)$ la derivata di $f(x)$ si ha:

- $D(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}$ (qualunque sia l'esponente α, in ogni x interno all'I.D. della funzione potenza in esame)
  Visto ieri per $\sqrt[3]{x}$, e x^3
- $D e^x=e^x$
- $D\ln x=\frac{1}{x}$
- $D\,\mathrm{sen}\,x=\cos x$
- $D\cos x=-\mathrm{sen}\,x$.

... non le dimostro (ma potrei)

Caso particolare: $D(\sqrt{x})=D(x^{1/2})=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

Siano f, g definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$. Se f e g sono derivabili in x_0 si ha

- $D(f\pm g)(x_0)=Df(x_0)\pm Dg(x_0)$ DIM A PAG 6
- $D(f\cdot g)(x_0)=Df(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot Dg(x_0)$ DIM A PAG 6

Caso particolare: se $g(x)=c$: $c'(x)=0$

$D(cf)(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

e quindi: * $D(\log_a x)=D(\log_a e\cdot\ln x)=\log_a e\cdot\frac{1}{x}$

* derivata di un polinomio ....

VEDI ES. A PAG 7

Mostro che se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora è continua in x_0.

Dim. Devo provare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè che $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Osservo che derivab. in x_0 significa: esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} := f'(x_0)$$

Sottraggo a entrambi i membri $f'(x_0)$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) - f'(x_0) = 0$$

la somma dei limiti è il lim. della somma:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = 0$$

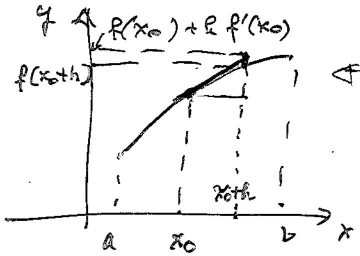
riduco allo stesso den.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h f'(x_0)}{h} = 0$$

cioè

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) = o(h)$$ o anche:

(*) $$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0)+hf'(x_0)}+o(h)$$



eq. della tang in x_0: $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

in particolare: $y(x_0+h) = f(x_0)+h f'(x_0)$

($\Rightarrow$ DIFFERENZIALE)

Dalla (*) deduco

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0)+hf'(x_0)+o(h) = f(x_0)$$ c.v.d.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)+g(x_0+h))-(f(x_0)+g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(f\cdot g)'_{x=x_0} = f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)] + [f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)}\,\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}\right] =$$

$g(x_0)$ poiché g essendo derivabile in x_0 è continua in x_0

$f(x_0)$ poiché costante

$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

Per convincersi che non vale $(fg)'=f'g'$:

$x' = 1$

$(1\cdot x)' = 0\cdot 1 = 0$ FALSO

se uso erroneamente la formula $(fg)'=f'g'$

$$(x^5-7x^3+10x^2-x+1)'=$$
$$=(x^5)'-(7x^3)'+(10x^2)'-(x)'+(1)'=$$
$$=5x^4-7\cdot 3x^2+10\cdot 2x-1+0=$$
$$=5x^4-21x^2+20x-1$$

---

derivate delle potenze

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}= \qquad x\neq 0$$
$$=-\frac{1}{x^2}$$

Sarà sempre vero che la derivata di una funzione dispari dà luogo a una funz pari (e viceversa)?

Risponderemo dopo il teor. di derivaz delle funzioni composte. (SÌ). Infatti:

$f(x)$ dispari significa che $\forall x\in I, D$,

$f(-x)=-f(x)$. Derivando entrambi i membri si ha ancora uguaglianza

$(f(-x))'=f'(-x)\cdot(-x)=-1\cdot f'(-x)=-f'(-x)$

$(-f(x))'=-f'(x)$

$\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$

$\Rightarrow f'$ è pari

e similmente a partire dalla funz. pari

$$\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x)}{(\cos x)^2}=$$
$$=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=1+(\operatorname{tg}x)^2=\frac{1}{\cos^2x}$$

TEOREMA di DERIVAZIONE delle FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f:(a,b)\to B\subseteq\mathbb{R}$ e $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ con $B\subseteq(c,d)$

a,b,c,d eventualmente infiniti

due funzioni tali che

f sia derivabile in $x_0\in(a,b)$

g " " in $f(x_0)\in B\subseteq(c,d)$

Allora $g\circ f(x)=g(f(x))$ è derivabile in x_0 e

(*) $$\boxed{D(g\circ f)(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$$

composizione prodotto

Per ricordarselo provare a scrivere così:

$y=f(x)$ e rappresento $f'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$

$z=g(y)$ " $g'(y)$ come $\frac{dz}{dy}$

mentre rappresento $D(g\circ f)$ come $\frac{dz}{dx}$

Allora (*) si rilegge: $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

ESEMPI

- Considero $g(y)=\frac{1}{y}$: $\forall y\neq 0$ $g'(y)=-\frac{1}{y^2}$

  Allora $D\left(\frac{1}{f(x)}\right)=D(g\circ f(x))=g'(f(x))\cdot f'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

  in tutti gli x tali che $f(x)\neq 0$.

- Conseguenza: FORMULA di DERIVAZIONE del RAPPORTO:

  se $g(x_0)\neq 0$

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

  Infatti: $\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right)$

•• In particolare $(\tan x)'=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

- Sia f derivabile in x_0 e $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\;)} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a f'(ax)$$

ESEMPIO:

$$(\operatorname{sen}(2x))' = 2 \operatorname{sen}'(2x) = 2\cos(2x)$$

Casi particolari:

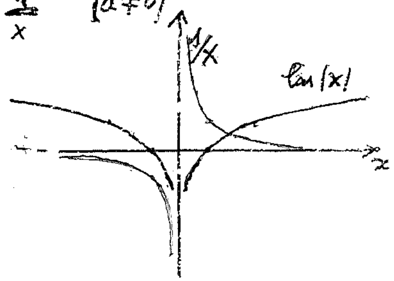
- $$D(e^{ax}) = a\cdot e^{ax}$$

e quindi

$$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)c^x$$

$$D(e^{-x}) = -e^{-x}$$

- $$D(\ln ax) = a\cdot\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} \quad (a \neq 0)$$



e quindi

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$$

e complessivamente

$$\rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \leftarrow$$

... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

<u>Osservazione</u>: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa): vedi pag 7.

<u>Esercizi</u>. Calcolare le derivate di

1. $\ln x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10} x)^2$
4. $\operatorname{sen} x \cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$