DERIVATE ASSEGNATE IERI

1. $\left(\ln x - 5x^3 + 4\cos x\right)' = (\ln x)' - 5(x^3)' + 4(\cos x)' =$

$$= \frac{1}{x} - 5\cdot 3x^2 - 4\,\mathrm{sen}\,x$$

2. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' + (2^x)' + (3)' =$

$$2^x = e^{x\ln 2}$$

$$= x + \ln 2 \cdot e^{x\ln 2} + 0 =$$

$$= x + (\ln 2)\cdot 2^x$$

$$x \xrightarrow{(\,)\ln 2} x\ln 2 \xrightarrow{e^{(\,)}} 2^x$$

3. $\left[(\log_{10} x)^2\right]' = \left[(\log_{10} e \cdot \ln x)^2\right]' = \left[(\log_{10} e)^2 \cdot (\ln x)^2\right]' =$

$$= (\log_{10} e)^2 \cdot \left[(\ln x)^2\right]' = (\log_{10} e)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 2(\ln x)$$

$$x \xrightarrow{\ln(\,)} \ln x \xrightarrow{(t)^2} (\ln x)^2$$

derivata $\frac{1}{x}$ derivata $2t$ con $t = \ln x$

Oppure, ricordando che:

$$(\log_{10} x)' = \log_{10} e \cdot \frac{1}{x}$$

$$\left[(\log_{10} x)^2\right]' = 2\cdot\log_{10} x \cdot \log_{10} e \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 2\cdot(\log_{10} e)^2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

4. $(\mathrm{sen}\,x \cdot \cos x)' = (\mathrm{sen}\,x)'\cos x + \mathrm{sen}\,x\,(\cos x)' =$

$$= \cos x \cdot \cos x + \mathrm{sen}\,x\,(-\mathrm{sen}\,x) =$$

$$= \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = \cos 2x$$

Oppure

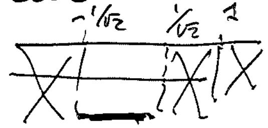
$$\mathrm{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x \Rightarrow$$

$$(\mathrm{sen}\,x \cos x)' = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x\right)' = \frac{1}{2}(2\cos 2x) =$$

$$= \cos 2x$$

5. $\left(\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' =$; I.D. $\begin{cases} 1-2x^2 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

cioè



$$\left[-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\right]$$

funzione composta: $x \mapsto 1-2x^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{1-2x^2}$

e ricordando che

$$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= \left(\frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2}\left((1-x)^{-1/2}\right)'\right) =$$

funzione composta $x \xrightarrow{1-(\,)} 1-x \xrightarrow{(\,)^{-1/2}} (1-x)^{-1/2}$

$$= \frac{0-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(-1) =$$

$$= \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$$

I.D. della derivata: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lim_{x\to(1/\sqrt{2})^-} f'(x) = -\infty \Rightarrow$ la tang. al grafico di $f(x)$ in $x = 1/\sqrt{2}$ è verticale

6.

$f(x) = x^x$ non rientra nei casi $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+) \\ (x^a)' = a\, x^{a-1} \quad (x>0) \end{cases}$ (3

$\boxed{\text{I.D.}: x>0}$

$$x^x = e^{x \ln x} \qquad x \xmapsto{g} x\ln x \xmapsto{e^{(\,)}} x^x$$

$$(x^x)' = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x}\left(x' \ln x + x (\ln x)'\right) =$$
$$= x^x\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1)$$

---

7. $(1-x)^{2x} = e^{2x \ln(1-x)}$ (I.D. $(-\infty, 1)$)

$$\left[(1-x)^{2x}\right]' = e^{2x \ln(1-x)} \left(2x \cdot \ln(1-x)\right)' =$$
$$= (1-x)^{2x}\left[2 \cdot \ln(1-x) + 2x\, (\ln(1-x))'\right] =$$
$$= (1-x)^{2x}\left[2 \ln(1-x) + 2x \cdot \frac{-1}{1-x}\right]$$

Compiti a casa. Calcolare le derivate di (Dopo aver trovato l'I.D. delle funzioni)

$x^2 \tan\sqrt{x}$, $\ln(f(x))$, $\ln(2e^x+3)$

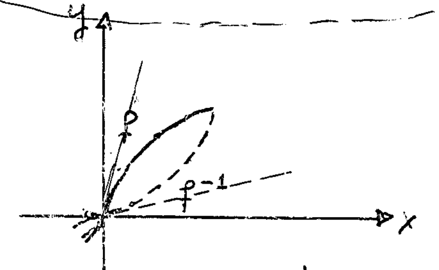
$\sqrt{2x^2+x+3}$, $\dfrac{[f(x)]^\alpha}{(g(x))^\beta}$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA.

Sia $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ (a,b eventualmente infiniti) ed esista la funzione inversa: $f^{-1}: B \to (a,b)$.

Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$D(f^{-1})_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



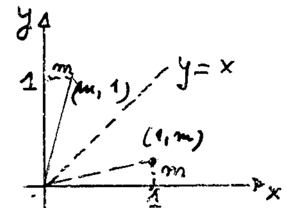


illustrazione con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Se $f'(x_0) = 0$ ....
vedi $y = x^3$ e la sua inversa $x = \sqrt[3]{y}$

ATTENZIONE: così formulato il teorema va bene per calcolare i singoli valori della derivata.
Se vogliamo la "funzione derivata di $f^{-1}(y)$" serve ricondurre a y la variabile che compare al 2° membro: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

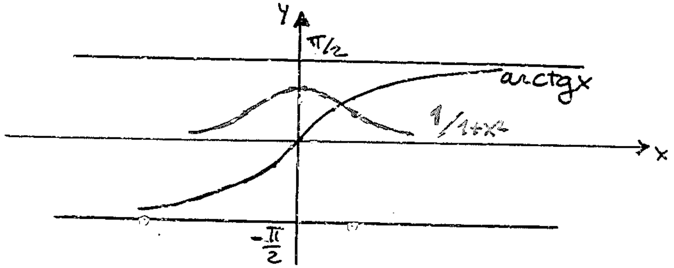
Esempio: $y = \operatorname{tg} x$ è invertita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ da $x = \operatorname{arctg} y$.

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

funzione in x!

Riesprimendo anche la funzione inversa nella variabile x abbiamo

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



- Similmente

  sen: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è invertita da arcsen, cioè

$y = f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$

$$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{D(\operatorname{sen} x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = \frac{1}{(\cos x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = ?$$

se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\operatorname{arcsen} x)'$ è def. su $(-1,1)$

- Similmente

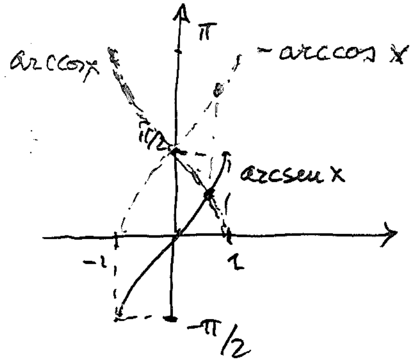
  cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$ è invertita da arccos, cioè

$y = f(x) = \cos x$ e $x = f^{-1}(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow D \arccos y = \frac{1}{D(\cos x)_{x=\arccos y}} = \frac{-1}{(\operatorname{sen} x)_{x=\arccos y}} = ?$$

se $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\arccos y)'$ è def su $(-1,1)$

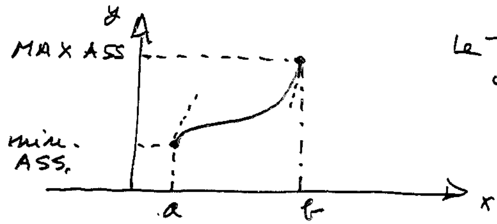


$-\arccos x$ è la funzione $(\operatorname{arcsen} x) + \frac{\pi}{2}$!

per questo la derivata di arcsen x e quella di arccos x sono una l'opposta dell'altra.

Un'osservazione su un teorema a pag 7

ATTENZIONE. Il teor di FERMAT riguarda estremi relativi, non assoluti



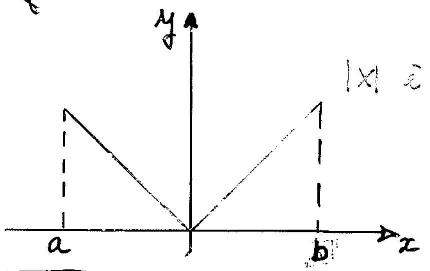
Le Tangenti da Destra in (a, f(a)) e da Sinistra in (b, f(b)) non sono parallele all'asse x !

DERIVATE E ....

- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x)$ è continua in x_0.

PROVATO IERI!

Il viceversa è falso



$|x|$ è continua in $x_0 = 0$

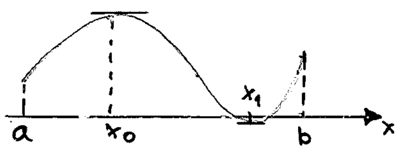
- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ha in $x_0 \in (a,b)$ (interno ad (a,b)) un punto di massimo relativo e f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0$$

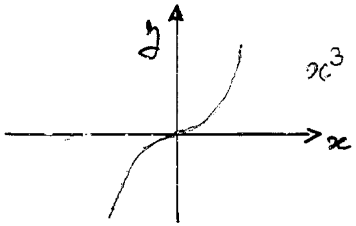
Idem se x_2 è un punto di minimo relativo

(Sul testo: ESTREMI LOCALI)

viene detto: **TEOR. DI FERMAT**



ATTENZIONE: il viceversa è falso



$x_0 = 0$ è un punto a tangente stazionaria MA non estremo locale

Dim. del teor di Fermat

x_0 sia un punto di (a,b), MAX relativo per f

$\Rightarrow$ esiste un intervallo (a_1,b_1) t.c.

$$x_0 \in (a_1,b_1) \subseteq (a,b) \quad e$$

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (a_1,b_1)$$

Poiché in x_0 $f(x)$ è derivabile esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Che segno ha il rapporto incrementale? Dipende:

$h > 0$: $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

Vale la Contronominale del T. della perm. del segno; allora:

$$\boxed{\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0}$$

$h < 0$: $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

Similmente $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0}$

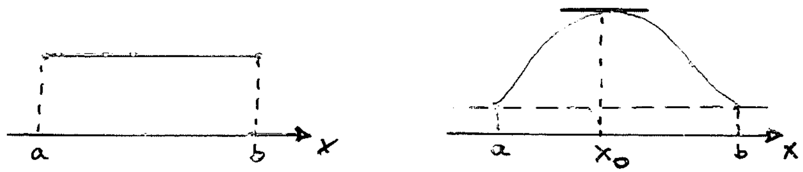
ma $\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta f}{h}$ poiché f è deriv. in x_0

e quindi devono essere entrambi $= 0$.

Però

• TEOR. di ROLLE: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a)=f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

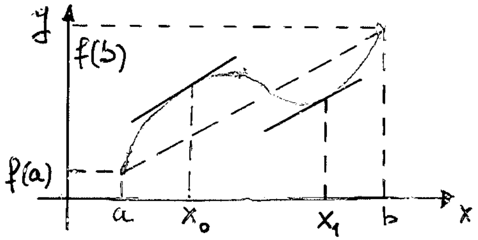
$$f'(x_0)=0$$



Più in generale

• TEOREMA di LAGRANGE: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Provare con $f(x)=x^2$ o $f(x)=\frac{1}{x}$

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.

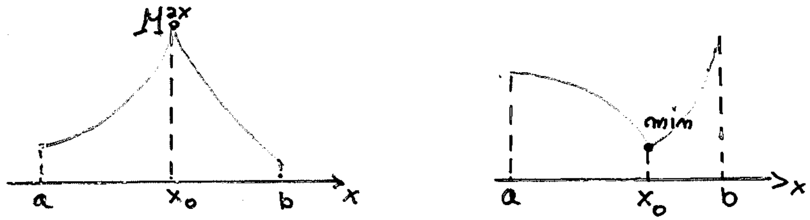
Daremo la dim. di questi due teoremi tra due lezioni; ora privilegiamo le applicazioni

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

- Se $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Rightarrow$ f è crescente in (a,b) (*)
- Se $f'(x)<0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Rightarrow$ f è decrescente in (a,b)
- Se $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Rightarrow$ f è costante in (a,b)

$$\Downarrow$$

- Se $f'(x)>0$ per $x<x_0$ e $f'(x)<0$ per $x>x_0$ in x_0 c'è un MASSIMO RELATIVO
- Se $f'(x)<0$ per $x<x_0$ e $f'(x)>0$ per $x>x_0$ in x_0 c'è un MINIMO RELATIVO



Altra conseguenza, sulle primitive

(dico che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F(x)$ è definita ~~dove~~ sullo stesso intervallo su cui lo è $f(x)$ e $F'(x)=f(x)$).

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di una stessa funzione (su uno stesso intervallo $[a,b]$) $f(x)$, esse differiscono per una costante.

Infatti $(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$

$\Rightarrow (F-G)(x)=c \Rightarrow F(x)=c+G(x)$.

(*) Dim. $\forall s,t$ con $a<s<t<b$ si ha che

PIÙ ESTESA NELLA SUCCESSIVA PAG 11

f è continua in $[s,t]$, derivabile in (s,t) $\Rightarrow$

$\exists x_0\in(s,t)$ t.c. $\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(x_0)$

Se $t>s$, visto che $f'(x_0)>0$, anche $f(t)>f(s)$

TEOR. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b). 11

Se $\forall x_0\in(a,b)$ $f'(x_0)\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$ la funzione $f(x)$ è crescente in (a,b) / decresc.

Dim. La tesi equivale a dire

$\forall\, x_1, x_2\in(a,b)$ se $x_1<x_2$ allora $f(x_1)\leq f(x_2)$ ($\geq$)

cioè

$$x_2-x_1>0 \Longrightarrow f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \ (\leq)$$

$[x_1,x_2]$ è un intervallo contenuto in $[a,b]$

quindi f è continua in $[x_1,x_2]$

derivabile in (x_1,x_2)

Applico T. di Lagrange:

$\exists\, x_0\in(x_1,x_2)$ t.c.

$$f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Quindi

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1)$$

$\forall x_0\in(a,b)$ si ha $f'(x_0)\geq 0$ ($\leq$) (IPOTESI)

$\Longrightarrow f'(x_0)(x_2-x_1)\geq 0$ ($\leq$) $\Longrightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$ ($\leq$)

TEOR. f cont. in $[a,b]$, deriv in (a,b), $f'(x_0)=0\ \forall x_0$ in (a,b) $\Rightarrow f(x)=c$

Infatti $\forall\, x_1\in(a,b]$ ($\Rightarrow x\neq a$). Applico T. di L. all'intervallo $[a,x_1]$ (valgono le ipotesi)

$\exists x_0$ t.c. $$f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$$

$\forall x_0$ $f'(x_0)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(a) \Rightarrow f(x)=$ costante

---

12

Il teor di Lagrange si può rileggere dicendo che se f è cont. in $[a,b]$ e deriv. in (a,b) allora $\exists x_0$ t.c.

$f(b)=f(a)+f'(x_0)(b-a)$: PASSO INIZIALE per formula di TAYLOR.

Attenzione alla discussione del segno della derivata prima. Ad es. supponiamo che

$$f'(x)=x^2(1-x)=x^2-x^3$$

Problema 1: di quale funzione può essere la derivata? Brevi ragionamenti sulle derivate delle potenze portano a dire che una può essere

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$$

(e le altre sono della forma $f(x)+c$ con $c\in\mathbb{R}$)

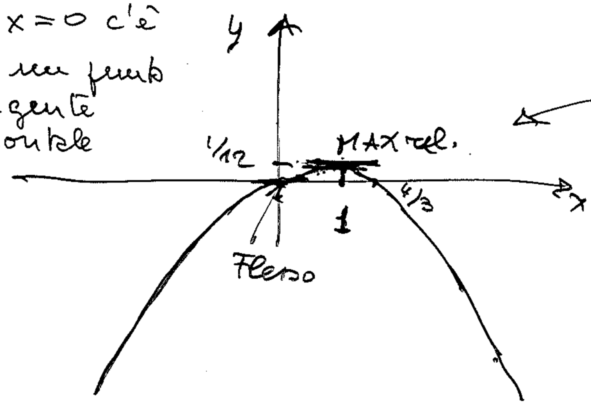
Domanda 2: $f(x)$ può avere un estremo relativo in $x=0$?

$f'(x)=x^2-x^3=x^2(1-x)>0$ per $x<1$ poiché $x^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Quindi

$f(x)$ cresce in $(-\infty,1)$, decresce in $(1,+\infty)$ } ha max rel. in $x=1$

e in $x=0$ c'è solo un punto a tangente orizzontale



$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$f(x)=0$ per $x=0$ o per $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x=0$ cioè $x=\frac{4}{3}$