1

$$\left(x^2\cdot\tan\sqrt{x}\right)' = (x^2)'\tan\sqrt{x} + x^2\,(\tan\sqrt{x})' =$$

$$= 2x\tan\sqrt{x} + x^2\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\boxed{\left[\tan(f(x))\right]' = \left(1+\tan^2 f(x)\right)\cdot f'(x) \qquad \left(1+(\tan f(x))^2\right) f'(x)}$$

$$= 2x\tan\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)$$

$$\left[\ln(2e^x+3)\right]' = \frac{2\cdot e^x + 0}{2e^x+3} = \frac{2e^x}{2e^x+3}$$

$$\boxed{\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Studiare:

$f(x) = \ln(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \ln 2$

IMPRESCINDIBILE nello studio di funzione:

(1) I.D.

(2) limiti agli estremi dell' I.D. (continuità negli altri punti?)

(3) intervalli di monotonia $\Longrightarrow$ estremi relativi ?

(4) GRAFICO

2

Studio $f(x) = \ln(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \ln 2$

$= \ln\left(\frac{2x+2}{2}\right) - \arctan\sqrt{x} =$

$= \ln(x+1) - \arctan\sqrt{x}$

(1) I.D. $\begin{cases} x+1>0 & \text{perché sia def ln} \\ x\geq 0 & \text{perché sia def } \sqrt{\ } \end{cases}$

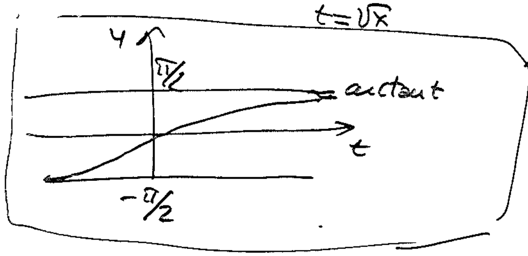
$\iff x \geq 0$ cioè $[0,+\infty)$

(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$

in particolare ho visto che certamente per $x=0$ è soddisfatta l'eq. $f(x)=0$

cioè 0 è uno zero di $f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \arctan\sqrt{x} = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty$



$$\left(\arctan g(x)\right)' = \frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$$

(3) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+x)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

I.D. $f' = (0,+\infty)$ e il denom di $f'(x)$ è sempre >0 ove $\exists f'$

$2\sqrt{x}-1>0 \iff \sqrt{x} > \frac{1}{2} \iff x > 1/4$. Quindi

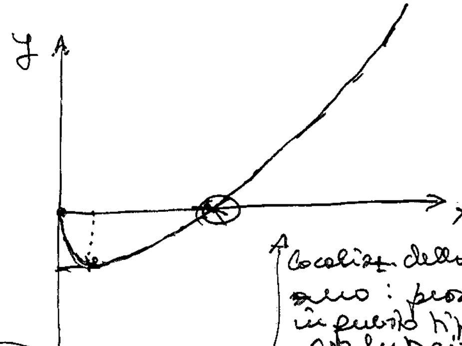
$f'(x)>0$ per $x\in(1/4,+\infty)$: $f(x)$ cresce in $(1/4,+\infty)$

$f'(x)=0$ per $x=1/4$

$f'(x)<0$ per $x\in(0,1/4)$: $f(x)$ decresce in $(0,1/4)$

$\searrow\nearrow \Rightarrow$ in $x=\frac{1}{4}$ c'è un minimo relativo

(4)



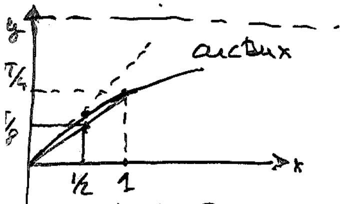
per $x=1$ $f(1)=\ln 2-\arctan 1<0$

$\Rightarrow$ lo zero sta $(1,+\infty)$

per $x=e-1$ $f(e-1)=\ln e-\arctan\sqrt{e-1}\gtrless 0$?

il valore minimo deve essere <0 poiché $f(x)$ decresce in $(0,1/4)$ e $f(0)=0$. Visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ da un certo x_0 in poi sarà $f(x)>M>0$. Poiché $f(1/4)f(x_0)<0$ e $f(x)$ è continua in $[1/4,x_0]$ posso applicare TEOR. ZERI: ci sarà uno zero in $(1/4,+\infty)$! e ce ne sarà 1 solo poiché in $[1/4,+\infty)$ la $f(x)$ è monot. (crescente) e dunque invertibile ($\Rightarrow$ ogni valore di $f((1/4,+\infty))$ viene assunto 1 e 1 solo volta.)

MIGLIORIE (5) $f(1/4)=\ln 5/4-\arctan(\frac{1}{2})$ Calcolatrice!



$\arctan\frac{1}{2}>\pi/8$ poiché la funz. è concava.

(6) $$\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{2\sqrt{x}}=-\infty$$

(7) CONVESSITÀ ???...

$f(x)=e^{1/x}$ I.D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1^{\pm}$ $\Rightarrow$ asint. oriz. per $x\to\pm\infty$ di eq. $y=1$

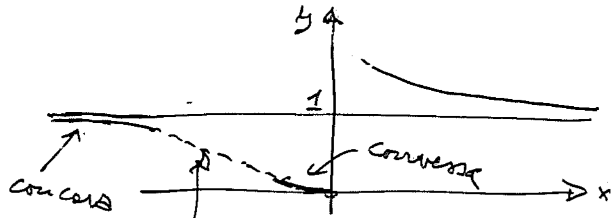
$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to0^-} f(x)=0$

componendo della funz. $\frac{1}{x}$ che decresce in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$ con la e^t sempre cresc. $f(x)$ decresce in $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=e^{1/x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{e^{1/x}}{x^2}<0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}-\frac{e^{1/x}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\boxed{\frac{1}{x}=t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}-\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{t^2}{e^t}=0^-$$



FLESSO: DOVE? $\longrightarrow$ Domani

5

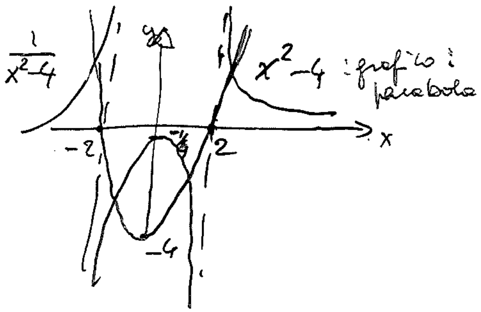
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4}$$

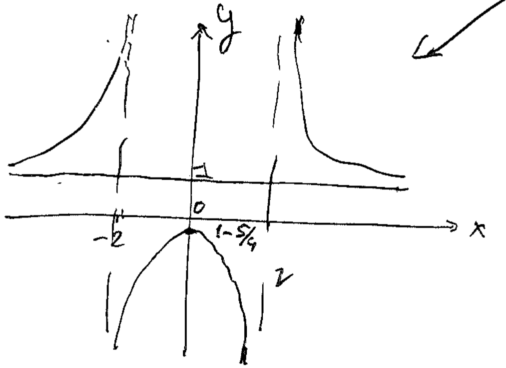
grado del numeratore non $<$ di quello del den.

I.D. $x^2-4 \neq 0$ perché sia def. la frazione

$x \neq \pm 2$ cioè

$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$





Studio tramite funz elementari

oppure ROUTINE:

(1bis) : $f(x)$ non ha zeri poiché $x^2+1>0 \ \forall x$

$f(x)$ è >0 / <0 se DEN >0: in $(-\infty,-2)$ e $(2,+\infty)$; <0: in $(-2,2)$

(1ter) : simmetrie: $f(x)$ è funz pari $\Rightarrow$ la posso studiare in $(0,+\infty)$ e poi ribaltare il grafico.

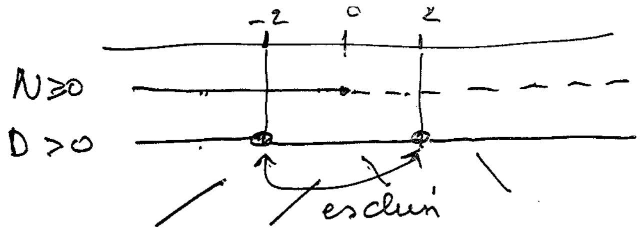
(2) : limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1^+ \quad (N>D \ \forall x)$$

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{asintoto vert: } x=2 \ (\text{per simm. } x=-2)$$

(3) : $f'(x) = \left(1+\frac{5}{x^2-4}\right)' = \frac{-5(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \geq 0$

6



Quindi $f(x)$ cresce in $(-\infty,-2)$ e in $(-2,0)$, decresce in $(0,2)$ e in $(2,+\infty)$ e ha max rel in $x=0$: $f(0)=-\frac{1}{4}$

$$f(x) = -2x + \ln(e^x-4)$$

I.D. $e^x-4>0$ perché sia def ln.

$\Leftrightarrow e^x>4 \Leftrightarrow x>\ln 4$ cioè $(\ln 4,+\infty)$

$\lim_{x\to\ln 4^+} f(x) = -2\ln 4 + \ln 0^+ = -\infty$: asint. vert. $x=\ln 4$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} -2x+\ln(e^x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} -2x+x = -\infty$ ASINTOTO OBLIQUO?

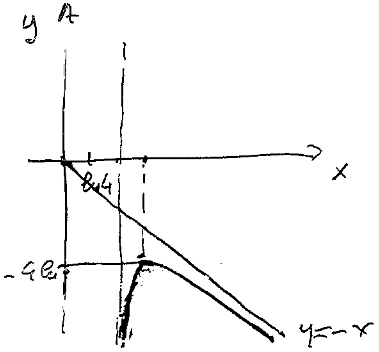
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1 = m$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-1)x = \lim_{x\to+\infty} -x+\ln(e^x-4) =$

$= \lim_{x\to+\infty} -\ln e^x + \ln(e^x-4) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x-4}{e^x}\right) = \ln 1 = 0 = q$

eq. asintoto obliquo: $y=-x$



$$f'(x) = \left[-2x + \ln(e^x - 4)\right]' =$$
$$= -2 + \frac{e^x}{e^x - 4} =$$
$$= \frac{-2e^x + 8 + e^x}{e^x - 4} \geq 0$$

$D > 0$ poiché ln ha arg > 0

$N = 8 - e^x \geq 0$ per $x \leq \ln 8$

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ in $(\ln 4, \ln 8)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ cresce lì $(\ln 4, \ln 8)$

$f'(x) = 0$ in $x = \ln 8$

$f'(x) < 0$ in $(\ln 8, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ decresce in $(\ln 8, +\infty)$

$\Rightarrow$ in $x = \ln 8$ c'è un max relativo che di fatto è anche MAX ASS.

$$f(\ln 8) = -2\ln 8 + \ln(8-4) =$$
$$= -6\ln 2 + 2\ln 2 = -4\ln 2$$

$\Rightarrow$ $f(x) < 0$ $\forall x \in$ I.D. poiché il MAX ass. è < 0

$f(x) = \ln x - \frac{1}{x^3}$: dimostrare che è invertibile nel suo I.D.

Posso (o fare ragionamenti sulle funz. elementari) studiare la monotonia di $f(x)$ con la $f'(x)$.

I.D. $x > 0$ perché sia def. ln
$x \neq 0$ " " " $\frac{1}{x^3}$
$\Rightarrow (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - (x^{-3})' = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} =$$
$$= \frac{x^3 + 3}{x^4} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

$f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ cresce in $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è invertibile in $(0, +\infty)$