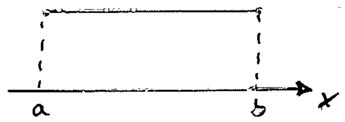
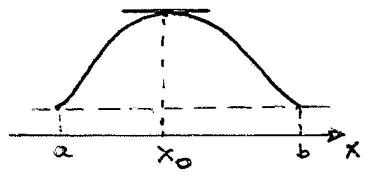
Riprendiamo i due teoremi:

- TEOR. di ROLLE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) almeno un punto x_0 t.c. $f'(x_0) = 0$

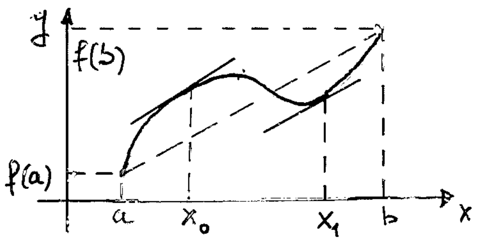




Più in generale

- TEOREMA di LAGRANGE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) almeno un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Provare con $f(x) = x^2$ o $f(x) = \frac{1}{x}$ VEDI PAG 4

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.

VEDI appunti del 31/10/12

Dim. del teor. di ROLLE

IP. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, deriv. in (a,b), $f(a) = f(b)$

TS. $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$.

Dim. f è cont. su un chiuso limitato. Posso applicare T. di WEIERSTRASS $\Longrightarrow$ f ha in $[a,b]$ un MAX e un min. assoluto

1° caso: può darsi che tanto il MAX che il min. cadano negli estremi: a e b

supponiamo per esempio
$f(a) = m$
$f(b) = M$

$$\forall x \in (a,b) \qquad \underbrace{f(a) = m \le f(x) \le M = f(b)}_{\text{sono = per ipotesi}}$$

$\Longrightarrow \forall x \in (a,b) \quad f(x) = f(a)$ cioè la funzione f è costante su $[a,b]$

$\Longrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Cioè mi va bene qualunque $x_0 \in (a,b)$.

2° caso: almeno 1 tra il punto di min e quello di MAX è interno ad (a,b). Supponiamo per fissare le idee che sia il punto di MAX che chiamo x_0.

Poiché $x_0 \in (a,b)$ è pto di MAX. REL.

Per ipotesi f è derivabile in x_0

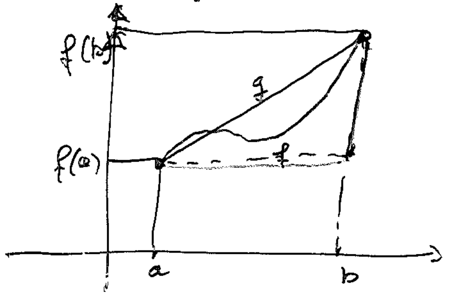
Applico il teor. di FERMAT: $f'(x_0) = 0$ C.V.D.

Dim. del TEOR di LAGRANGE

I.P. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, cont. in $[a,b]$, deriv. in (a,b)

TS. $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dim. Considero:



$h(x) = f(x) - g(x)$ ove

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a);$$

$g(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ in particolare in $[a,b]$

$h(x)$ in quanto differenza di funzioni cont. in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) è cont. in $[a,b]$ e deriv. in (a,b)

Inoltre
$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) - f(a) = 0 \\ h(b) = f(b) - f(b) = 0 \end{array}\right\} \text{sono uguali}$$

$\Rightarrow$ posso applicare T. di Rolle:

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $h'(x_0) = 0$

Ma
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e quindi ho trovato che $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c.
$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

cioè
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

C.V.D.

Esercizio:
Applicare il teor di Lagrange all'intervallo $[1, b]$ con $b>1$ alle due funzioni

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

Lo faccio per $f_2(x)$.

Visto che in $[1,b]$ $\frac{1}{x}$ è continua
in $(1,b)$ è derivabile

$\exists x_0$ t.c. $f_2'(x) = \frac{f_2(b) - f_2(1)}{b-1}$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Cerco x_0 t.c.

$$-\frac{1}{x_0^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{1}}{b-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{x_0^2} = \frac{1-b}{b(b-1)}$$

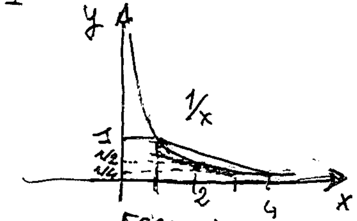
$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0^2 = b \iff x_0 = \sqrt{b}$$

perché $x_0 \in (1,b)$ e quindi $x_0 > 0$
cioè devo scegliere la soluzione positiva



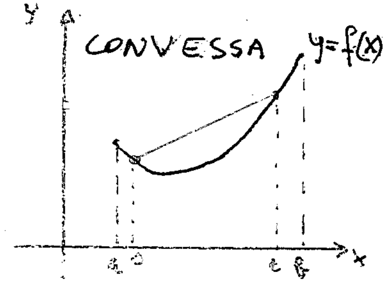
Esempio nel caso $b=4$

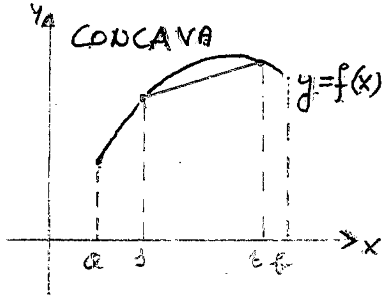
Ancora uso del teor. di Lagrange e sue conseguenze

- Studio della convessità - concavità ...

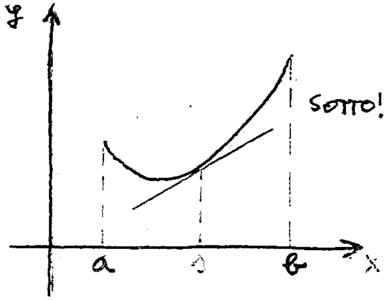
Dico che $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ se per tutti gli $s,t \in [a,b]$ il segmento che congiunge $(s,f(s))$ con $(t,f(t))$ sta SOPRA il grafico di f relativo all'intervallo $[s,t]$

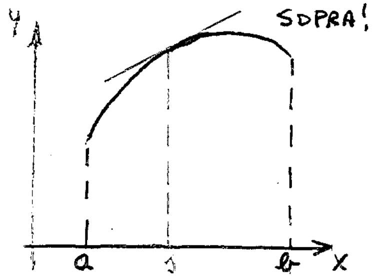
(è concava ... se sta SOTTO)





NOTARE: se la funzione è derivabile in $[a,b]$ in ogni punto del grafico, $(s,f(s))$ è definita la TANGENTE. Dove stanno le tangenti nei due casi?





E che cosa fa il coefficiente angolare della tangente al variare di s in (a,b), nei due casi?

Se f è convessa / concava in (a,b) allora f' cresce / decresce in (a,b)

Enunciate così sono condizioni necessarie di convessità (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti. Cioè

se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata prima (= derivata seconda: $f''(x)$) in (a,b) allora

f convessa $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b)
f concava $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)
e vale = solo in punti isolati

Esempi

$f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$ è concava in $(0,+\infty)$

$f(x) = x^3$ è ......

VEDI PAG 7

Punti di flesso = punti in cui cambia la concavità

- TEOREMA di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

∘ Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ ivi derivabili

∘∘ Sia $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

∘∘∘ Se $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$

∘∘∘∘ ed esiste $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

L'ipotesi ∘∘∘ può essere sostituita da $\lim_{x \to a+} f = \lim_{x \to a+} g = \pm\infty$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$ in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ in ogni sottointervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ la funz. è convessa

$f(x) = \ln x$ $\quad$ ID $(0,+\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ $\quad$ " $\quad$ $\ln x$ cresce

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\quad$ " $\quad$ $\ln$: concavo

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad$ $f(x)$ crescente poiché f' si annulla solo in un punto isolato

$f'' = 6x > 0$ in $(0,+\infty)$: convessa

$\quad\quad\; < 0$ " $(-\infty, 0)$: concava

in $x=0$ punto di flesso.

Seguono esempi di applicazione del teor. di de l'Hospital (i primi 2 limiti sono già noti: vedi confronto di infiniti)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \quad \text{purché } \alpha > 0$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{1}{3}x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}x}} \underset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\frac{1}{9} e^{\frac{1}{3}x}} \underset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\frac{1}{27} e^{\frac{1}{3}x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} x}{\cos x - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{-\operatorname{sen} x + 1} \quad ??$$

den. si annulla ∞ volte
non trovo un intervallo
$(a, +\infty)$ in cui den $\neq 0$
e ~~DEN~~ non ha limite

Non posso applicare H. Invece, metto in evidenza $2x$ al num. e $-x$ al den.:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\right)}{-x\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\arctan x + \frac{1}{x}\right) = $$

| $\arctan x \to \pi/2$, $\frac{1}{x} \to 0$ | $\oplus \to \frac{\pi}{2}$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

in quanto le funz. in esame sono continue.

> NELLE PAGINE 9-12 sono svolti
> ESERCIZI A RICHIESTA

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+3) - \ln(x+1)\right] = $$

Funzione è def se $\begin{cases} x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ cioè in $(-1,+\infty)$

Calcolo $\lim_{x\to+\infty}$ quindi posso pensare di essere in $(-1,+\infty)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right) =$$

$\frac{x+3}{x+1} \to 1$: $[\infty \cdot 0]$

ma $\frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$.

Visto che $\frac{2}{x+1} \to 0$, $\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right) \sim$

$\sim \frac{2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{2}{x+1} = 2.$$

Derivabilità di

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \le 1 \\ \alpha(x-1) & \text{se } x>1 \end{cases}$$

dove in $\mathbb{R}$? Per quali α ?

Soluzione:

per $x \in (-\infty, 1)$ $f(x) = x^2-1$: è derivabile in ogni punto dell'intervallo

per $x \in (1,+\infty)$ $f(x) = \alpha(x-1)$ è deriv. in ogni punto dell'intervallo

Per vedere che cosa succede in $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \alpha = \alpha$$

$\Rightarrow$ la funz è derivabile in $x=1$ se e solo se $\boxed{\alpha = 2}$

A casa: vedere se è derivabile nell'origine la funz.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

$f(x) = \ln(x^2+x) - x$

I.D. $(x^2+x)>0$ perchè sia def. ln.

$\iff x<-1$ oppure $x>0$

$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x^2) - x = +\infty + \infty = +\infty$

ci saranno asintoti obliqui? No

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln x^2 - x}{x} = -1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty$

deve finito, non c'è asintoto.

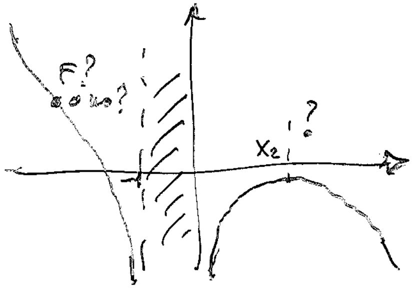
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x^2) - x = [\infty-\infty]$

$= -\infty$

niente asintoti per lo stesso motivo.

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $(\ln 0^+)$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

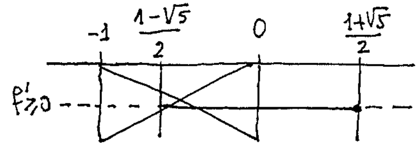


$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} - 1 =$

$= \frac{-x^2-x+2x+1}{x^2+x} \geq 0$

$\iff \begin{cases} x\in I.D. \\ x^2-x-1\le 0\end{cases}$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$



$f'(x)<0$ in $(-\infty,-1)$ e in $(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty)$

$f'(x)>0$ in $(0,\frac{1+\sqrt5}{2})$

$\Longrightarrow$ f decresce in $(-\infty,-1)$ e in $(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty)$

f cresce in $(0,\frac{1+\sqrt5}{2})$

f ha un massimo relativo in $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$

Inoltre $f(\frac{1+\sqrt5}{2}) = \ln(\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot\frac{3+\sqrt5}{2}) - \frac{1+\sqrt5}{2} = \ln(2+\sqrt5) - \frac{1+\sqrt5}{2} < 0$

(vale circa -0.174)

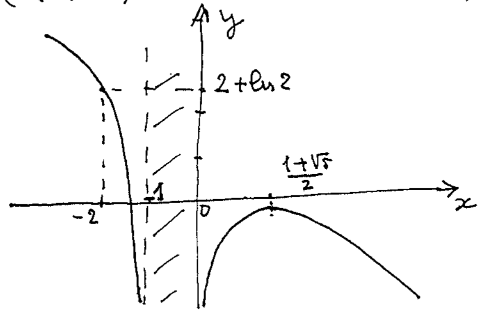
Quindi nell'intervallo $(0,+\infty)$ la funzione è sempre <0 (visto che il suo valore massimo su tale intervallo è <0)

Invece, dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ sull'intervallo $(-\infty,0)$ c'è uno ZERO (teorema degli zeri, applicabile poiché f essendo derivabile è continua) e uno solo poiché f è monotona decrescente su tale intervallo e quindi invertibile e quindi biunivoca.

Esistono punti di flesso?

$f''(x) = \frac{2(x^2+x)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} - 0 = \frac{-2x^2-2x-1}{(x^2+x)^2} =$

$= -\frac{x^2+(x+1)^2}{(x^2+x)^2} < 0$ per ogni $x\in$ I.D. $\Longrightarrow f(x)$ è concava in $(-\infty,-1)$ e in $(0,+\infty)$. Grafico:



lo zero è compreso nell'intervallo $(-2,-1)$ poiché $f(-2) = 2+\ln 2 > 0$