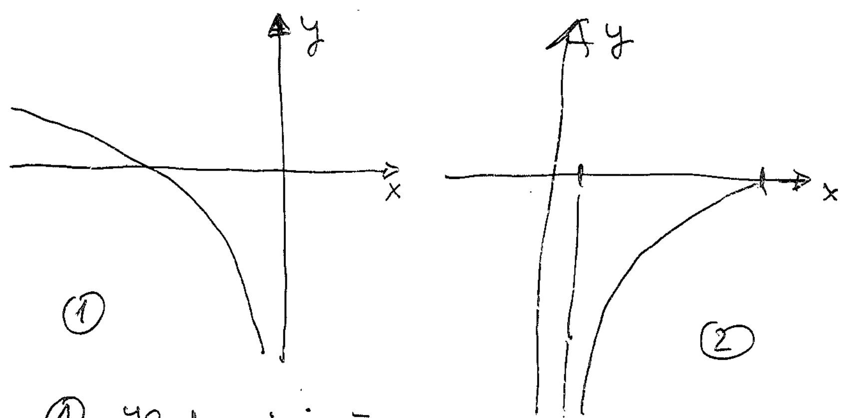
$$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos x\,(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\overset{\to 1}{\cos x}\,(1-\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2(5x)\,\underbrace{(1+\cos x)}_{\downarrow\, 2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} 5x)^2} = \boxed{\text{poiché } x\to 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\,\frac{x^2}{25x^2} = \frac{2}{25}$$

MATE.ASS. 4.8 (8)

Scegliere: dire che "$f(x)$ prende valori in $(-\infty,0)$" significa:



(1) Il dominio è contenuto in $(-\infty,0)$

(2) L'immagine è contenuta in $(-\infty,0)$

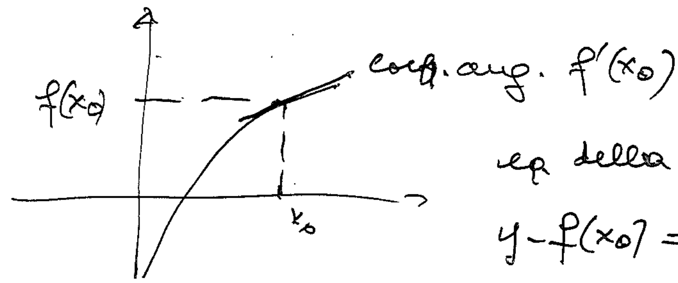
RISPOSTA: (2)

Per descrivere la situazione (1) diremo invece che $f(x)$ è definita in $(-\infty,0)$ (o un suo sottoinsieme)

"Ogni funzione è definita sui punti dell'asse x e prende valori sull'asse y" per dirla con uno slogan

Trovare l'eq. della retta tangente nel punto di ascissa $x=0$ al grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)$$



eq della retta tangente è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0 = 0$

$$f(0) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{2-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{2-x}\right)' = \frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{1(2-x)-(-1)(1+x)}{(2-x)^2} =$$

$$f'(0) = \frac{1}{1\cdot 2}\left(1(2-0)+(1+0)\right) = \frac{3}{2}$$

eq. della tangente in $(0, f(0))$:

$$y + \ln 2 = \frac{3}{2}(x-0)$$

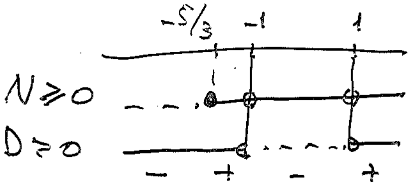
$$y + \ln 2 = \frac{3}{2}x$$

$$f(x) = \frac{3x+5}{x^2-1}$$

I.D. $x^2 \neq 1$ cioè $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

Segno e zeri della funzione:

$$\frac{3x+5}{x^2-1} \geq 0$$



$f(x) \geq 0$ per $x \in (-5/3,-1) \cup (1,+\infty)$

$f(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-5/3) \cup (-1,1)$

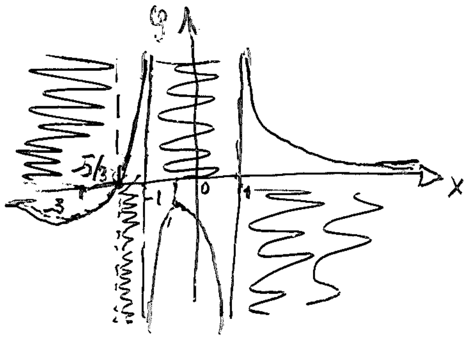
$f(x) = 0$ per $x = -5/3$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = 0^{\pm}$

per $x \to +\infty$, e per $x \to -\infty$ asint. orizz.: $y=0$

$\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty$

asintoto verticale $x=-1$



$\lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \frac{8}{0^{\mp}} = \mp\infty$ asintoto verticale $x=1$

Grazie a questi limiti, posso prefigurare la presenza di un min. rel. in $(-\infty,-5/3)$ e di un MAX rel. in $(-1,1)$

$$f'(x) = \frac{3(x^2-1)-(3x+5)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}$$

nell'I.D. di $f(x)$: Den >0

Studio il segno di Num $= -(3x^2+10x+3)$

$3x^2+10x+3 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \begin{cases} -3 \\ -1/3 \end{cases}$

Quindi $N \geq 0 \iff x \in (-3,-1/3)$

Tenuto conto che $D>0$ se $x \neq \pm 1$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-3,-1)$ oppure $x \in (-1,-1/3)$

e quindi f cresce in $(-3,-1)$ e in $(-1,-1/3)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty,-3)$ oppure $x \in (-1/3,1)$ oppure $x \in (1,+\infty)$

e quindi f decresce in $(-\infty,-3)$ e in $(-1/3,1)$ e in $(1,+\infty)$

f ha min rel in $x=-3$ e

$$f(-3) = \frac{3(-3)+5}{(-3)^2-1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

f ha max rel in $x=-1/3$ e

$$f(-1/3) = \frac{3(-1/3)+5}{(-1/3)^2-1} = \frac{4}{-\frac{8}{9}} = -\frac{9}{2}.$$

Concavità?

$$f''(x) = \left(-\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2}\right)' = -\frac{(6x+10)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (3x^2+10x+3)2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= -2\,\frac{3x^3+5x^2-3x-5-6x^3-20x^2-6x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= +2\,\frac{+3x^3+15x^2+9x+5}{(x^2-1)^3}$$

Per trovare il segno di $f''(x)$ bisogna trovare uno zero del polinomio di 3° grado $3x^3+15x^2+9x+5=P(x)$.
Le possibili soluzioni razionali ($\pm 1, \pm 5, \pm \frac{5}{3}$) non sono buoni candidati. Quelle positive non possono annullare un polinomio a segni tutti >0.
Quanto a quelle negative

$P(-1) = -3+15-9+5>0$ (e poi f'' non è definita in -1 ...)

$P(-5) = -375+375-45+5<0$

$P(-\frac{5}{3}) = -\frac{125}{9}+\frac{125}{3}-\frac{5}{3}+5>0$ (e poi $f(-\frac{5}{3})=0$ e $x=-\frac{5}{3}$ è in una posizione in cui la funz. non può che essere convessa.

Non resta che applicare il teorema degli zeri

$P(-2) = -3\cdot 8+15\cdot 4-18+5>0$

$P(-3) = -3^4+5\cdot 3^3-3^3+5 = 3^3+5>0$

$P(-4) = -3\cdot 64+3\cdot 80-36+5 = 3\cdot 16-3\cdot 12+5>0$

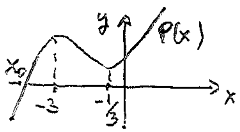
$P(-5) = -40<0$

$\Rightarrow$ uno zero sta in $(-5,-4)$

Ci sono altri zeri per $P(x)$?

$P'(x) = 9x^2+30x+9 \geq 0$ per $x \leq -3$ o $x \geq -\frac{1}{3}$

$P(-3)>0$, $P(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}+\frac{5}{3}-3+5>0$



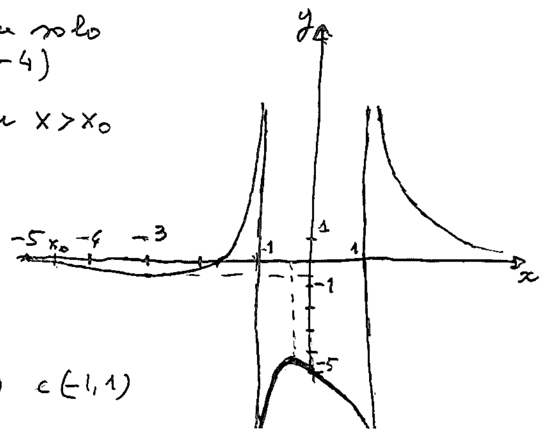
Quindi c'è un solo zero $x_0 \in (-5,-4)$

$\Rightarrow P(x)>0$ per $x>x_0$

e dato che il denom. è >0 per $x<-1$ o $x>1$

$f''(x)>0$ (e quindi $f(x)$ è convessa) in $(x_0,-1)$ e $(1,+\infty)$

$f''(x)<0$ (e quindi $f(x)$ è concava) in $(-\infty,x_0)$ e $(-1,1)$



Primitive

Abbiamo visto che data una funzione continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ le sue primitive su $[a,b]$ si possono ottenere tutte da una nota pur di aggiungere una costante (e quindi sono tante quanti i numeri reali)
Come calcolare le primitive?

a) PRIMITIVE ELEMENTARI

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^β (se $\beta\neq -1$) è $\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$ (vedi pag 7)
- $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^{-1} è $\ln|x|$
- $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow$ " " " e^x è e^x
- $D(a^x) = \ln a \cdot a^x$ $\Rightarrow$ " " " a^x è $\frac{a^x}{\ln a}$ (vedi PAG 7)
- $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\Rightarrow$ " " " $\cos x$ è $\operatorname{sen} x$
- $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$ " " " $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$
- $D(\operatorname{tg} x) = 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow$ " " " $1+\operatorname{tg}^2 x$ è $\operatorname{tg} x$
  $\frac{1}{\cos^2 x}$ "
- $D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ una " " $\frac{1}{1+x^2}$ è $\operatorname{arctg} x$

b) Metodi di integrazione: sono riletture delle principali regole di derivazione:

per scomposizione $\Leftarrow$ • derivazione della somma
• derivazione del prodotto per un numero
per parti $\Leftarrow$ • derivazione del prodotto di funzioni
per sostituz. $\Leftarrow$ • derivazione di funzione composta.

x^α di chi può essere la derivata?

è noto che:

$$D(x^\beta) = \beta x^{\beta-1}$$

$$D(k x^\beta) = k\beta x^{\beta-1} \overset{?}{=} x^\alpha$$

$$\iff \begin{cases} \beta - 1 = \alpha \\ k\beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \beta = \alpha+1 \\ k = \dfrac{1}{\alpha+1} \end{array}$$

Problema: e se $\alpha+1=0$? NON FUNZIONA

DEVO ESCLUDERE $\alpha = -1$

Quindi se $\alpha \neq -1$ una primitiva di x^α è $\dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

Se $\alpha = -1$ la funz di cui cerco una primitiva è $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

e quindi una sua primitiva è $\ln|x|$.

Primitiva di e^x? una è e^x

Primitiva di 2^x? a^x?

$$D(ka^x) = k(\ln a)\cdot a^x = a^x \iff k\ln a = 1 \iff k = \frac{1}{\ln a}$$

una prim. di a^x è $\dfrac{1}{\ln a}\cdot a^x$

Integrazione?

L'insieme di tutte le possibili primitive di $f(x)$ con $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, cont. in $[a,b]$ lo rappresento come

$$\{ F : [a,b] \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b] \} =$$

$$= \{ F(x) + c \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b],\ c \in \mathbb{R} \}$$

$$= \int f(x)\,dx \quad \underset{DF}{:} \text{ integrale indefinito di } f(x)$$

È un insieme di funzioni, la collezione delle primitive

$\Downarrow$

Cercare una primitiva si dice, stereografando: INTEGRARE

primitiva di $x^3 - 4x^2 + 3x - 1$? METODO DI INTEGRAZ. PER SCOMPOSIZIONE

$$1\left(\frac{x^4}{4}\right) - 4\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3\left(\frac{x^2}{2}\right) - x$$

In generale le primitive del polinomio hanno la forma $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x + c$, $c \in \mathbb{R}$

$$\int (x^3 - 4x^2 + 3x - 1)\,dx = \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$