I) Integrazione per scomposizione

se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite su $[a,b]$ e hanno ivi primitiva $F(x)$ e $G(x)$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

ES.1) una primitiva di $x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ è

e in generale una primitiva del polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è

ES.2) una primitiva di $(\operatorname{tg} x)^2 = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 - 1$ è

ES.3) una primitiva di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$ è ...

N.B. Per indicare l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$ si usa scrivere $\int f(x)\,dx$: questa scrittura prende nome di integrale indefinito di $f(x)$.
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) \}$$

o più brevemente $= F(x) + c$

Esercizi. Calcolare:

$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$, $\int \frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$, $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\,dx$, $\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

occhio al dominio

Vedi pag 3, 4, 6

$$\int \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int (\operatorname{tg} x)^2\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx - \int 1\,dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \operatorname{tg} x + ? = \tan x - \frac{1}{\tan x} + c$$

$$\left(\frac{1}{\tan x} \right)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int\left[\left(\frac{x}{x\sqrt{x}}\right)+\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)\right]dx$$ = per scomposizione

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x} + \ln|x| + c =$$

$\boxed{\text{per ipotesi } x>0}$ $= 2\sqrt{x} + \ln x + c$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx =$$

I.D. $x \neq \pm 1$; 3 intervalli in cui cercare le primitive $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$

$$= \int \frac{3x}{x-1}\,dx = $$

che cosa cambia? l'I.D. Quindi alla fine devo ricordare qual era l'I.D. iniziale.

$$= 3\int \frac{x}{x-1}\,dx =$$ il grado del Num è = grado del denom.

$$= 3\int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = 3\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$ metodo di scompos.

$$= 3\left(x + \ln|x-1|\right) + c$$ questo è l'$\int$ della 2a funzione

negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1,1)$ l'integrale è

$$= 3\left(x + \ln(1-x)\right) + c$$

Invece su $(1,+\infty)$ l'integr. è $= 3(x+\ln(x-1)) + c$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\right)dx \overset{(*)}{=}$$

$\boxed{1-x^2 = (1-x)(1+x)}$

$$= \int\left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\ln|x-1| + \ln|x+1|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$$

interpretare le primitive in dipendenza dagli intervalli di continuità: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c}$$

(*) $$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{A+Ax+B-Bx}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(A-B)x + A+B = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1/2 \\ A=1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+2}{x-1}\,dx = \int\left(1+x+\frac{2}{x-1}\right)dx =$$

interv. di continuità? $(-\infty,1)$ e $(1,+\infty)$

abbiamo trovato quoziente $(1+x)$ e resto (2) della divisione di x^2+1 per $x-1$

$$= x + \frac{x^2}{2} + 2\int \frac{dx}{x-1} = x + \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| + c$$

Scomposizione

interpretare a seconda dei 2 interv. di continuità

II. Integrazione per parti

Ricordo che $(fg)' = f'g + fg'$

$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$

usando la scomposizione

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrabile}}\, \underbrace{g'(x)\,dx}_{} = \underbrace{\int [f(x)g(x)]'\,dx}_{f(x)g(x)} - \int f'(x)g(x)\,dx$$

funz. differenziabile ... $= dg$: COME SCEGLIERLI?

ESEMPI

1) $\int \log_e x\, dx =$ VEDI pag 8

2) $\int \cos^2 x\, dx =$

3) $\int x\cos x\, dx =$ vedi 10

4) $\int x e^x dx =$ vedi pag 7

5) $\int e^x \cos x\, dx =$ vedi pag 9

$\boxed{\text{2 VIE}}$

6) $\int x^\alpha \ln x\, dx =$ $\boxed{1^\circ \text{ caso}: \alpha \neq -1}$ vedi pag 7

$\boxed{2^\circ \text{ caso}: \alpha = -1}$

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx =$$

I.D. $\operatorname{sen} x + \cos x \neq 0$
$x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \operatorname{sen} x + \cos x + c$$

con dominio in uno dei seguenti intervalli...

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

I.D. : $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$?

$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 0 \iff \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff$

$\iff x + \frac{\pi}{4} = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$a \operatorname{sen} x + b \cos x = \qquad a, b \in \mathbb{R}$ con $(a,b) \neq (0,0)$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a \operatorname{sen} x + b \cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\, \operatorname{sen}(x+\theta)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\int x e^x \, dx$ che cosa scelgo come fattor finito?

Proviamo a vedere le conseguenze:

$f = x \qquad g' = e^x$

$f' = 1 \qquad g = e^x$

Sostituisco

$$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + c$$

Se invece pongo $f = e^x \quad g' = x$

$f' = e^x \quad g = \frac{x^2}{2}$

$$\Longrightarrow \int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

è più complicato del primo

$\Longrightarrow$ non va bene.

$$\int x^\alpha \ln x \, dx = \boxed{\text{per parti fattor finito } \ln x} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$f = \ln x \qquad g' = x^\alpha$

$f' = \frac{1}{x} \qquad g = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x - \int \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$$

$$\int x^0 \ln x \, dx = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$$

Invece

$$\int x^{-1} \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} \text{per parti con f.f. } \ln x & \\ f = \ln x & g' = \frac{1}{x} \\ f' = \frac{1}{x} & g = \ln x \end{array}} =$$

$$= \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T = (\ln x)^2 - T \qquad T \text{ incognita} \\ 2T = (\ln x)^2 \\ \Downarrow \\ T = \frac{(\ln x)^2}{2} \end{array}}$$

per parti con

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx =$$

$\boxed{\text{ff. } f = e^x \quad f' = e^x \qquad \text{fd. } g'dx = \cos x\, dx \quad g = \operatorname{sen} x}$

$$\boxed{\int f g' dx = fg - \int f' g \, dx}$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx =$$

andiamo avanti p.p. tenendo ff e^x

$$= e^x \operatorname{sen} x + \int e^x (-\operatorname{sen} x) dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + \left[e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \right]$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

$$C = c/2$$

per esercizio provare a calcolare $\int e^x \cos x \, dx$ con ff $\cos x$.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$\boxed{\text{OBBLIGATORIO ff : } x^2 \quad f = x^2 \quad g' = \operatorname{sen} x \quad f' = 2x \quad g = -\cos x}$

$$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx =$$

$\boxed{\text{p.p. ff. } 2x \quad f = 2x \quad g' = \cos x \quad f' = 2 \quad g = +\operatorname{sen} x}$

$$= -x^2 \cos x + 2x(+\operatorname{sen} x) - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$$

PROVA:

$$(-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c)' =$$

$$= -2x \cancel{\cos x} + x^2 \operatorname{sen} x + 2 \cancel{\operatorname{sen} x} + 2x \cancel{\cos x} - 2 \cancel{\operatorname{sen} x} + 0 =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x$$

$$\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

posso risolverla per parti?

NO

perché passerei all'integrale

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot 2x \cdot \cos x^2 \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

III. Integrazione per sostituzione

Ricordo: $D(h(g(t))) = h'(g(t))\cdot g'(t)$

Sia ora $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ la funzione continua di cui vogliamo trovare una primitiva $\mathcal{H}$: $\mathcal{H}'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

VERSIONE FACILE Se $f(x)$ ha la forma $h'(g(x))\cdot g'(x)$ si ha

$$\int f(x)\,dx = \int h'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = h(g(x)) + c$$

e quindi $\mathcal{H}(x) = h(g(x))$.

Esempi	Casi particolari:
1) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	ⓐ $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx =$ ⓑ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+b^2} =$
2) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}(g(x)) + c$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$ vedi pag 13

In generale cerco di riprodurre questa situazione con una SOSTITUZIONE $x=g(t)$

VERSIONE GENERALE. Sia $g:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ una funz. derivabile con derivata 1ª continua e $\neq 0$ su $[c,d]$.

(ciò garantisce che esiste $g^{-1}:[a,b]\to[c,d]$: PERCHÉ?)

Allora

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Infatti, se $\mathcal{H}'(x)=f(x)$ $\quad\int \mathcal{H}'(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \mathcal{H}(g(t))+c$

e la sostituzione $t=g^{-1}(x)$ riporta proprio a $\mathcal{H}(x)+c$.

Esempi

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ Vedi pag 13

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ Vedi pag 14

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$$

Esempio

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$$

sugli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert + c$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+b^2} = \ln(x^2+b^2) + c$$

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2-b^2} = \ln\lvert x^2-b^2\rvert + c$$

$$\int \frac{g'(x)}{g^\alpha(x)}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)[g(x)]^{\alpha-1}} + c \quad ? \qquad \alpha\neq 1$$

$$\boxed{\int t^{-\alpha}\,dx = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}+c = \frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{(1-2)\cos x}+c = \frac{-1}{\cos x}+c$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}\,dx = \arctan(g(x)) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$x^2+2x+2 =$
$= 1 + x^2+2x+1 =$
$= 1+(x+1)^2$
$(x+1)' = 1$

$= \arctan(x+1) + c$

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} \Rightarrow dg = g'(t)\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \qquad a \neq \pm 1, \neq 0$$

cerco di ricondurmi all'integrale precedente

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]}$$

$\frac{x}{a} = t$
$x = at$
$dx = a \cdot 1 \cdot dt$

$$= \int \frac{a\,dt}{a^2(t^2+1)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}(\arctan t) + c =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\arctan\frac{x}{a}\right) + c$$

funz raz. fratt.
Den. pol. di 2° grado con $\Delta<0$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

voglio ricondurlo a un t^2+1

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1\right]$$

$$t = \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{\frac{3}{4}[t^2+1]} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + c$$