ESERCIZI A RICHIESTA (1

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) - \frac{1}{x}$

I.D. $\begin{cases} \frac{x^2}{x+2} > 0 & \text{perché arg del log.} \\ x \neq 0 & \text{" " " frazione} \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad : \quad (-2,0) \cup (0,+\infty)$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \ln \frac{4}{0^+} + \frac{1}{2} = +\infty$

asintoto verticale: $x = -2$

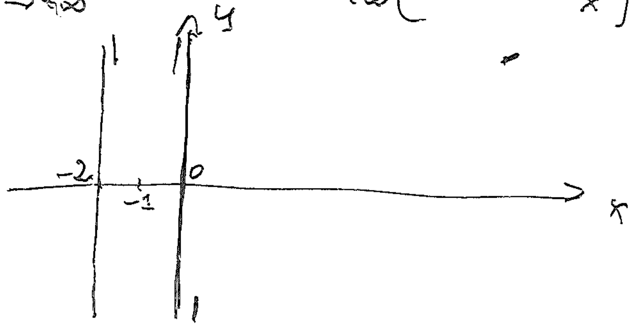
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \ln \frac{0^+}{2} - \frac{1}{0^-} = \ln 0^+ + \infty : [-\infty + \infty]$

$\boxed{x = -\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2\left(2-\frac{1}{t}\right)}\right) + t = \lim_{t \to +\infty} -\ln t^2 - \ln 2 + t =$

$= \lim_{t \to +\infty} t\Big(1 - \underbrace{\frac{\ln t^2 + \ln 2}{t}}_{\to 0}\Big) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln \frac{0^+}{2} - \frac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$



$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x+2}} \cdot \frac{2x(x+2) - 1 \cdot x^2}{(x+2)^2} + \frac{1}{x^2} =$

$= \frac{x^2 + 4x + (x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2(x+2)} > 0$

nell'ID $(-2,0) \cup (0,+\infty)$: den > 0

$N \geq 0$: $\underbrace{x < \frac{-5-\sqrt{17}}{2}}_{\text{non in } (-2,0)}$ o $x > \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$

$f'(x) > 0$ per $x \in \left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}, 0\right)$ e per $x \in (0,+\infty)$

e quindi in qs. intervalli la funz cresce

$f'(x) < 0$ per $x \in \left(-2, \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)$

e quindi in qs. intervallo la funz decresce

e in $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ c'è un punto di minimo RELATIVO

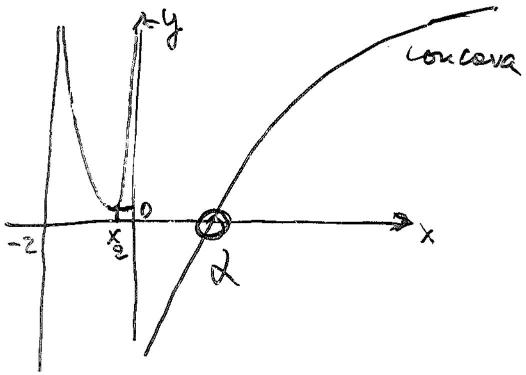
$f\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)^2}{\frac{-5+\sqrt{17}}{2} + 2}\right) - \frac{1}{\frac{-5+\sqrt{17}}{2}} =$

$\boxed{x_2^2 + 5x_2 + 2 = 0 \qquad x_2^2 = -5x_2 - 2 = \frac{25 - 5\sqrt{17} - 4}{2} = \frac{21 - 5\sqrt{17}}{2}}$

$= \ln \frac{\frac{21-5\sqrt{17}}{2}}{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} - \frac{2}{-5+\sqrt{17}} = \ln \frac{-64+16\sqrt{17}}{16} + \frac{2}{5-\sqrt{17}} =$

$(21 - 5\sqrt{17})(\sqrt{17}+1)$

$$= \underbrace{\ln\left(\sqrt{17}-4\right)}_{\text{calcol.}} + \frac{2(5+\sqrt{17})}{8} = \underbrace{\ln\left(\sqrt{17}-4\right) + \frac{5+\sqrt{17}}{4}}_{0,19} > 0$$



In $(-2,0)$ non ci possono essere zeri (minimo >0)

C'è 1 solo zero nell'intervallo $(0,+\infty)$

1 solo perché in tale interv. la funz. è crescente

1 almeno poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(1) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 1 < 0$

$f(2) = \ln 1 - \frac{1}{2} < 0$

$f(3) = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \frac{1}{3} > 0$? (*)

$f(4) = \ln \frac{\cancel{16}\,8}{\cancel{6}\,3} - \frac{1}{4} > 0$

Certamente:

$\Rightarrow \alpha \in (2,4)$

Metodo di bisezione se lo voglio determinare meglio

Quindi $f(x)$ è >0 in $(-2,0)$ e in $(\alpha,+\infty)$ mentre $f(x)$ è <0 in $(0,\alpha)$

(*) Di fatto $f(3) \sim 0.254\ldots > 0 \Rightarrow \alpha \in (2,3)$

$$\int x^4\left(2x^5+3\right)^{3/2}dx = \int \frac{1}{10}\, t^{3/2}dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}\cdot t^{5/2} + c$$

Sostituzione
$2x^5+3 = t$
$10x^4dx = dt$
$x^4dx = \frac{1}{10}\,dt$

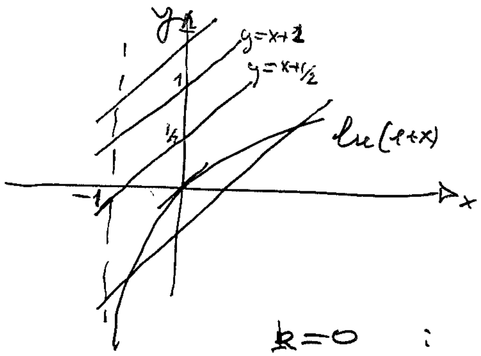
$$= \frac{1}{25}\left(2x^5+3\right)^{5/2} + c$$

ESERCIZI ASSEGNATI o SVOLTI

$f(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ a casa!

Studiare la disuguaglianza

$\ln(1+x) < x+k$ (con $x > -1$)



$\left(\ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x}$

$\left(\ln(1+x)\right)'_{x=0} = 1$

$\Rightarrow$ tangente in $(0,0)$ è $y=x$

$k=0$: $\ln(1+x)$ è una funzione concava. Tracciata la tangente in un punto del suo grafico, Tutto il grafico giace sotto la tang.

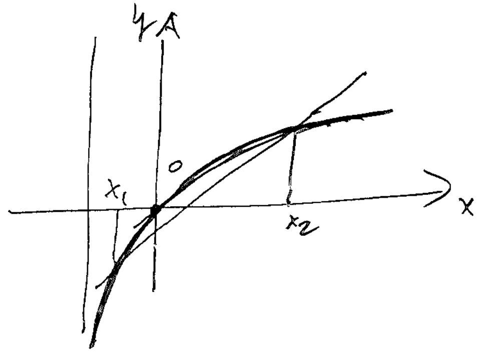
$\boxed{\ln(1+x) < x \quad \forall x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)} \Leftarrow$

(2)

$k > 0$ $y = x + k$: le rette con queste equaz. giacciono nel semipiano al di sopra di $y = x$

$\Longrightarrow \ln(1+x) < x + k \quad \forall x \in (-1, +\infty)$

$k < 0$ $y = x + k$: le rette corrisp. eq. hanno 2 intersez. col grafico di ascissa $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$



$\ln(1+x) < x + k$

per $x \in (-1, x_1)$ o $x \in (x_2, +\infty)$

Si mostri che $f(x) = e^{2x} + 2x^3$ è invertibile in $\mathbb{R}^3$. Detta $g(y)$ la sua inversa, si calcoli $g'(y)$ in $y = 1$ (senza determinare $g(y)$).

$f'(x) = 2e^{2x} + 6x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ su $\mathbb{R}$:

$y = f(x)$ monotone strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile
$f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ con $f'(x) \neq 0 \Rightarrow g(y)$ è
è derivabile in tutto il suo dominio (che è $\mathbb{R}$) e
$g'(y) = \dfrac{1}{(f'(x))_{x=g(y)}}$. Ora $y = 1 = f(x) \Leftrightarrow x = 0$
(essendo f invertibile la soluzione è unica e $x=0$ si vede a occhio!) e quindi $g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

(6)

$$\int x \cos 2x \, dx = \boxed{\begin{matrix}\text{pp. ff.}\\ x\end{matrix}}$$

primitiva di $\cos 2x$ è
$(k \operatorname{sen} 2x)' = \cos 2x$
$2k\cos 2x$
$\Downarrow$
$\boxed{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x}$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int 1 \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

[metodo di sostituzione $2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$ $dx = \frac{1}{2} dt$

$\int \frac{t}{4} \cos t \, dt = \frac{1}{4} \int t \cos t \, dt = \text{ecc...}$]

$$\int \cos^2 x \, dx = $$

$\boxed{\begin{matrix}\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ \cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}\end{matrix}}$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + 1) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + x\right) + c = \frac{\operatorname{sen} 2x + 2x}{4} + c =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + c$$

<u>Oppure</u> per parti:

$$\int \cos^2 x \, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)^2 dx = \boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$= \operatorname{sen} x \cos x + x - \int (\cos x)^2 dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x \cos x + x\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \qquad \boxed{a\ge 0}$$

$$= \int -a\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}\cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta =$$

$$= -a^2\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

$$= -a^2\int(1-\cos^2\theta)\,d\theta =$$

VEDI ESERCIZIO PRECEDENTE

$$= -a^2\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\theta}{2}\right)+c =$$

$$= -a^2\, \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2} + c =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left[\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]+c =$$

$$= \frac12\left(x\sqrt{a^2-x^2} - a^2\arccos\frac{x}{a}\right)+c$$

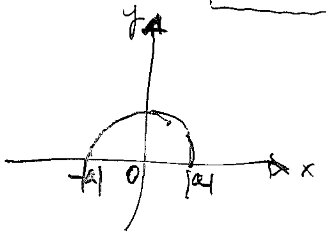
$\theta = \arccos\frac{x}{a}$

$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$y=\sqrt{a^2-x^2}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} y^2=a^2-x^2 \\ y\ge 0\end{cases}$ circonf. con centro in (0,0) e raggio |a|



cercare una sostituz. utile! ogni punto della circonf si scrive parametricamente come

$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\operatorname{sen}\theta\end{cases}$ $\theta\in[-\pi,\pi]$

Nel nostro caso $\theta\in[0,\pi]$

Sostituisco $x=a\cos\theta$

$dx=-a\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

Fare un controllo con $\boxed{a=2}$

$$\int \underbrace{\arctan x}_{ff}\,\underbrace{dx}_{fd} = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan x - \frac12\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan x - \frac12\ln(1+x^2)+c$$

$$\int \arcsen x\,dx \underset{pp}{=} x\arcsen x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

ff arcsen x

$$= x\arcsen x + \frac12\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arcsen x + \sqrt{1-x^2}+c$$

$$\int x(\cos x)^2\,dx = \int x\cdot\frac{\cos 2x+1}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}+\frac12\int x\cos 2x\,dx = \frac{x^2}{4}+\frac14\operatorname{sen}2x+\frac18\cos 2x+c$$

$$\int x\cos 2x\,dx = \frac12\operatorname{sen}2x+\frac14\cos 2x+c$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZ. RAZIONALI FRATTE CON DENOMINATORE POLINOMIO DI 2° GRADO

$$\int \frac{x-1}{2x^2-4x+5}\,dx =$$

ESAME: funz. raz. fratta

1°) grado num è < grado del denom. ; SÌ

2°) numeratore è (a meno del prodotto per una costante) la derivata del denom?

$$(2x^2-4x+5)' = 4x-4 = 4(x-1)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4(x-1)}{2x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-4x+5\right| + C$$

$$\int \frac{1}{2x^2-4x+5}\,dx =$$

ESAME: fratta.

1°) gr. num < gr. den.

2°) $N \neq D'$

3°) $\frac{\Delta}{4}(2x^2-4x+5) = 4-10<0$

Non ci sono radici!

↓

arctan di qualcosa

$$2x^2-4x+5 =$$
$$2(x^2-2x+1)+3 =$$
$$(\sqrt{2}(x-1))^2+3 =$$
$$3\left(\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}(x-1)\right)^2+1\right)$$
$$t = \sqrt{\tfrac{2}{3}}(x-1)$$
$$dt = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,dx \Rightarrow dx = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,dt}{3(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}(x-1)\right) + C$$

$$\int \frac{1}{2x^2-4x-5}\,dx =$$

ESAME: fratta

1°) gr. num < gr. den.

2°) $N \neq D'$

3°) $\frac{\Delta}{4} = 4+10 = 14 > 0$ esistono le radici

$$(2x^2-4x-5) = 2(x-x_1)(x-x_2).$$

Allora:

$$(*)\quad \frac{1}{2(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$$

Con A e B opportuni. Cerco:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2} \qquad (x_1<x_2)$$

Devo avere:

$$\frac{1}{2x^2-4x-5} = \frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{2(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x - Ax_2 - Bx_1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\cdot\frac{2+\sqrt{14}}{2} + B\,\frac{2-\sqrt{14}}{2} = 1 \end{cases}$$

Risolvo:

$$\begin{cases} B=-A \\ A\sqrt{14}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/\sqrt{14} \\ B = -1/\sqrt{14} \end{cases}$$

Sostituisco in (*) e calcolo l'integrale

$$= \frac{1}{2\sqrt{14}}\int\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{14}}\left(\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{2x-2+\sqrt{14}}{2x-2-\sqrt{14}}\right| + C$$