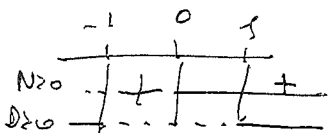
Su $(1,+\infty)$ come svolgo $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$? E come calcolo una primitiva?

PREMESSA: I.D. $\frac{x}{x^2-1}>0$



$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

posso calcolare primitiva di $f(x)$ ove la funz è cont.: quindi o su $(-1,0)$ o su $(1,+\infty)$

L'esercizio chiedeva di trovare una primitiva di $f(x)$ nell'intervallo $(1,+\infty)$.

In tale intervallo $N>0$, $D>0$ $\Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=\ln x-\ln(x^2-1)$$

$\Rightarrow$ nell'intervallo $(1,+\infty)$

$$\int x\ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)dx=\int[x\ln x-x\ln(x^2-1)]\,dx=$$

$$=\underset{pp}{\int x\ln x\,dx}-\int x\ln(x^2-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x^2-1)\left(\ln(x^2-1)-1\right)+c$$

sostituz: $x^2-1=t$, $2x\,dx=dt$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c_1$$

$$\int x\ln(x^2-1)\,dx=\int\frac{1}{2}\ln t\,dt=\frac{1}{2}t\ln t-\int\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}t\ln t-\frac{1}{2}t+c_2=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\left(\ln(x^2-1)-1\right)+c$$

Su $(-1,0)$: $\ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=\ln(-x)-\ln(1-x^2)$ ecc.

- $$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}=\int\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx=\int\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)dx$$

$$-\ln|\cos x|+\ln|\operatorname{sen}x|+c=\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right|+c=$$

$=\ln|\operatorname{tg}x|+c$ è una prim. su ciascun intervallo di tipo $\left(k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

- $$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x}=\boxed{\begin{array}{l}x=2t\\dx=2dt\end{array}}\int\frac{2dt}{\operatorname{sen}2t}=\int\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}\operatorname{sen}t\cos t}=$$

$$=\ln|\operatorname{tg}t|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$$

$x\in(k\pi,(k+1)\pi)\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{x}{2}\neq0$ è def.

$\Downarrow$

- $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\boxed{\begin{array}{l}t=x+\frac{\pi}{2}\\dt=dx\end{array}}\qquad\boxed{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x}$$

$$=\int\frac{dt}{\operatorname{sen}t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\pi/2}{2}\right)\right|+c$$

$\cos x\neq0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

Le primitive hanno per dominio uno degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $k\in\mathbb{Z}$

(quello opportuno per le considerazioni di altro tipo che si intendono fare

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx =$$

I.D. $x \geq 0$: qui funz. è cont $\Rightarrow$ eventuali primitive sono definite in $[0,+\infty)$.

$$= \int \frac{x^{1/2} - x^{1/4}}{1+x^{1/4}}\, dx = \boxed{\begin{aligned} x^{1/4} &= t \\ x^{1/2} &= t^2 \\ x &= t^4 \\ dx &= 4t^3 dt \end{aligned}} = \int \frac{t^2 - t}{1+t} \cdot 4t^3\, dt =$$

$$= 4 \int \frac{t^5 - t^4}{1+t}\, dt$$

Funz. raz. fratta con grado NUM > grado DEN: ora divido per denom. (*)

$$= 4 \int \left(t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{1+t}\right) dt =$$

$$= \frac{4}{5} t^5 - 2t^4 + \frac{8}{3} t^3 - 4t^2 + 8t - 8 \ln|1+t| + c =$$

$$= \frac{4}{5} x^{5/4} - 2x + \frac{8}{3} x^{3/4} - 4x^{1/2} + 8x^{1/4} - 8 \ln(1+x^{1/4}) + c =$$

$$= \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} - 2x + \frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - 8 \ln(1+\sqrt[4]{x}) + c$$

(*) Ruffini

	5	4	3	2	1	0
	1	-1	0	0	0	0
-1		-1	2	-2	2	-2
	1	-2	2	-2	2	-2

$\Rightarrow t^5 - t^4 = (t+1)(t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2) - 2$. Oppure

$$\begin{array}{l|l} t^5 - t^4 & t+1 \\ \hline -t^5 - t^4 & t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 \quad \text{Quoziente} \\ \quad -2t^4 & \\ \quad +2t^4 + 2t^3 & \\ \qquad 2t^3 & \\ \qquad -2t^3 - 2t^2 & \\ \qquad\quad -2t^2 & \\ \qquad\quad 2t^2 + 2t & \\ \qquad\qquad 2t \quad -2t - 2 = \boxed{-2} \ \text{Resto} & \end{array}$$

$$\int \text{sen}^3 x \sqrt{\cos x}\, dx = \boxed{(\cos x)' = -\text{sen}\, x}$$

$$= \int (-\text{sen}^2 x) \sqrt{\cos x}\, (\cos x)' dx = \boxed{\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$= \int (\cos^2 x - 1) \sqrt{\cos x}\, (\cos x)' dx = \quad \begin{aligned} \cos x &= t \\ (\cos x)' dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int (t^2 - 1)\sqrt{t}\, dt = \int \left(t^{2+1/2} - t^{1/2}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{7} t^{7/2} - \frac{2}{3} t^{3/2} + c = \frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + c =$$

$$= \frac{2}{7}(\cos x)^3 \sqrt{\cos x} - \frac{2}{3}\cos x \sqrt{\cos x} + c$$

I.D. $\cos x \geq 0$ $\quad \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

su questi intervalli la funz integranda è definita e continua $\Rightarrow$ ogni primitiva ha come dominio uno di questi intervalli

---

$$\int \left(\sqrt{\text{tg}^3 x} + \frac{1}{\sqrt{\text{tg}\, x}}\right) dx$$

I.D. $\text{tg}\, x \neq 0$ e deve essere def. $\Rightarrow \bigcup \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ in ciascun interv. la funz è continua e ivi ammette primit.

$$\sqrt{\text{tg}^3 x} + \frac{1}{\sqrt{\text{tg}\, x}} = \frac{\text{tg}^2 x + 1}{\sqrt{\text{tg}\, x}}$$

se sostituisco $t = \text{tg}\, x$ e $dt = (\text{tg}^2 x + 1)dx$ trovo

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{\text{tg}\, x} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{e^x \ln(2+e^x)}{(e^x+1)^2}\,dx = \boxed{\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix}} =$

$$= \int \frac{\ln(2+t)}{(t+1)^2}\,dt = \boxed{\begin{matrix} t+1 = s \\ dt = ds \end{matrix}} =$$

$$= \int \frac{\ln(1+s)}{s^2}\,ds = \boxed{\text{per parti con ff: } \ln(1+s)}$$

$$= -\frac{1}{s}\ln(1+s) + \int \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s}\,ds = -\frac{1}{s}\ln(1+s) + \int\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)ds =$$

$$= -\frac{1}{s}\ln(1+s) + \ln(s) - \ln(1+s) + c =$$

$$= -\frac{1}{1+e^x}\ln(2+e^x) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right) + c$$

$$\boxed{\frac{1}{s(1+s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}}$$

$$\boxed{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs}{s(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)} = \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \boxed{\begin{matrix} \sqrt{x-1} = t \\ x-1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}}$ $\displaystyle\int \frac{2\cancel{t}\,dt}{(t^2+1)\cdot\cancel{t}} = 2\arctan t + c$

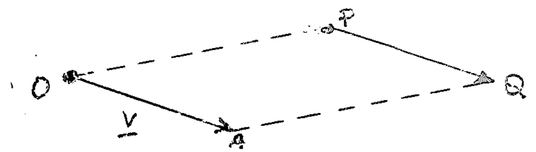
$$= 2\arctan\sqrt{x-1} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \boxed{\begin{matrix} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}}$ $\displaystyle\int \frac{2\cancel{t}\,d}{(t^2-1)\cancel{t}} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$ ...... ecc.

VETTORI

grandezze individuate da : MODULO (o norma) : reale ≥
DIREZIONE
VERSO.

Rappresentazione: FRECCE USCENTE DA UN PUNTO FISSATO DELLO SPAZIO : O



.... Traslazione $\underline{v}$ da O ad A
o equivalenteme da P a Q
o ......

$\overline{OA} = \overline{P}$

identificazione di vettori EQUIPOLLENTI

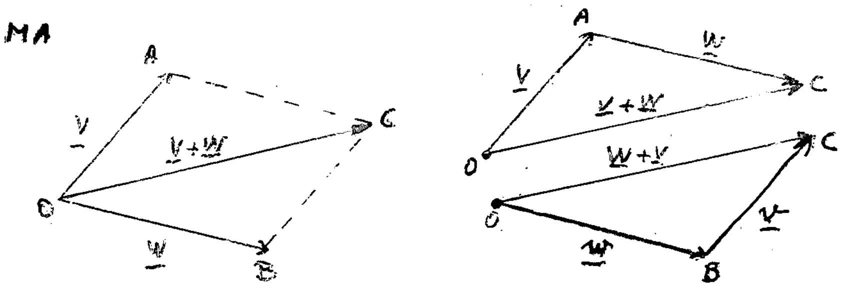
$|\underline{v}|$

se $|\underline{v}| = 0$ dico che $\underline{v}$ è il vettore nullo $\underline{0}$ •

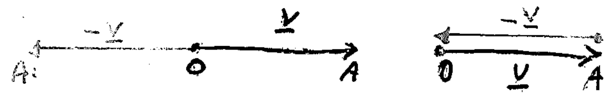
OPERAZIONI

SOMMA

$\underline{v}+\underline{w}$

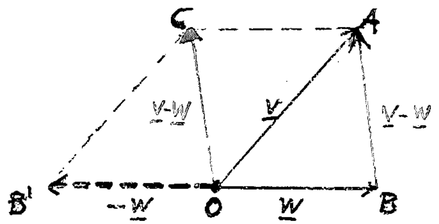


- commutativa
- associativa
- neutro : vettore nullo : $\underline{0}$
- opposto

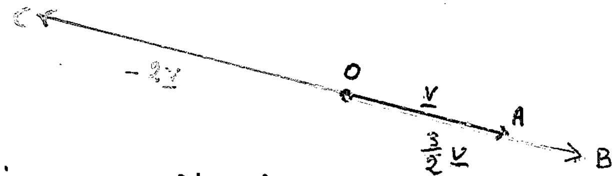


DIFFERENZA : $\underline{v} - \underline{w}$

$\vec{OC} = \cancel{\vec{AB}}$ NO $\vec{BA}$



PRODOTTO PER SCALARE $t \in \mathbb{R}$



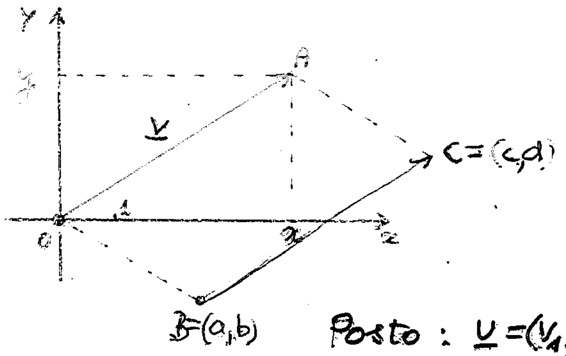
Per tutti i $\underline{v}, \underline{w}$ e gli scalari s, t:

- $(s+t)\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
- $s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$
- $s(t\underline{v}) = (st)\underline{v}$
- $1(\underline{v}) = \underline{v}$

Dirò che i vettori con "SOMMA" e "PRODOTTO PER SCALARE" formano spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

VETTORI COME "n-uple" ORDINATE

Sist. di riferimento nel piano



$\underline{v} = \vec{OA} = (x,y)$

x, y componenti (scalari) di $\underline{v}$

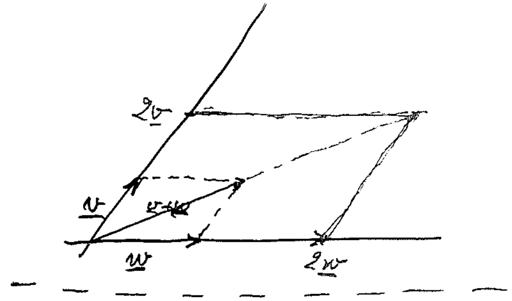
$\vec{OA} = \vec{BC} = (c-a, d-b)$

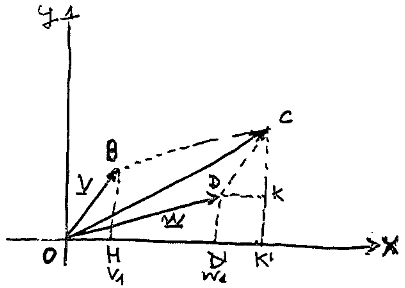
equazioni param. della retta

Posto: $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$\Rightarrow \underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2)$
$t\underline{v} = (tv_1, tv_2)$

Illustrazione della distributività:
$s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$
(basata sui triangoli simili)





$\vec{OB} = \vec{DC}$ e quindi i 2 triangoli rettangoli con cateti paralleli risp. all'asse x e all'asse y che hanno OB e DC come ipotenuse (OHB e DKC) sono uguali $\Rightarrow$
$\vec{OH} = \vec{DK} = \vec{D'K'}$
$\vec{HB} = \vec{KC}$

Allora $\vec{OK'} = \vec{OD'} + \vec{D'K'} = \vec{OD'} + \vec{DK} = \vec{OD'} + \vec{OH} = w_1 + v_1$
$\vec{K'C} = \vec{K'K} + \vec{KC} = \vec{D'D} + \vec{HB} = w_2 + v_1$,

se $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$ $\Rightarrow$ $\underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2)$

Analogamente si verifica $s\underline{v} = (sv_1, sv_2)$

$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$: Teorema di Pitagora!

$\forall \underline{v} = (v_1, v_2)$ si ha

$$\underline{v} = (v_1, 0) + (0, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$$

cioè ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come COMBINAZIONE LINEARE a coefficienti $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ di due vettori: $\underline{i} = (1,0)$, $\underline{j} = (0,1)$ che hanno rispettivamente la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x e dell'asse y e modulo 1: vengono detti VERSORI FONDAMENTALI e $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$: ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si scrive in uno e un sol modo come loro combin.