A RICHIESTA

Continuità in $x=1$ della funzione:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt[5]{2-x}}{\ln x} & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ \alpha & x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[5]{2-x}}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \boxed{x-1=t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{1-t}}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{5}t}{t} = \frac{1}{5}$$

per $t\to 0$ $\quad \ln(1+t) \sim t$

per $t\to 0$ $\quad (1-t)^{1/5}-1 \sim -\frac{1}{5}t$

Quindi la funzione è continua se $\alpha = \frac{1}{5}$

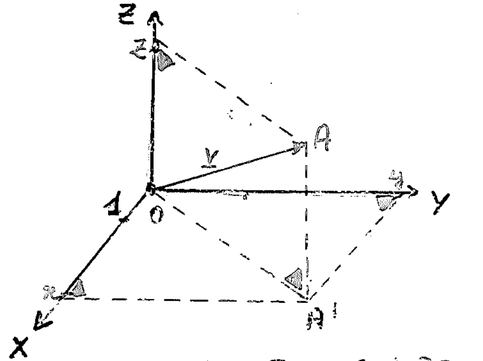
ORA, PROSEGUENDO I DISCORSI DI IERI SUI VETTORI!

Modulo di $\underline{v} = (x,y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

Distanza di B da C : $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

Versori della base canonica: $\underline{i}=(1,0)$ $\quad \underline{j}=(0,1)$

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA VEDI PAG 3



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{v} = \overrightarrow{OA} = (x,y,z)$

... componenti di $\underline{v}$

$|\underline{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti $B=(b_1,b_2,b_3)$ e $C=(c_1,c_2,c_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$

$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$; $\underline{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$\underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$

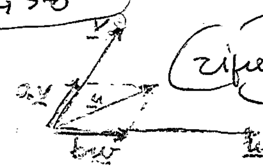
Versori della base canonica $\underline{i}=(1,0,0)$, $\underline{j}=(0,1,0)$, $\underline{k}=(0,0,1)$

$(x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z) = x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$

Combinazione lineare VEDI PAG 4

Indipendenza lineare VEDI PAG 5-6

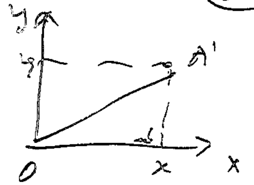
$\underline{v}, \underline{w}$ dipendenti



ripreso a PAG 7

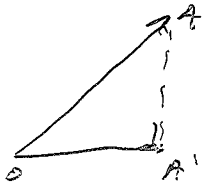
$\underline{u} = a\underline{v}+b\underline{w}$

DA PAG 2



Spiegazione di come trovare $|\overrightarrow{OA}|$ in $\mathbb{R}^3$

$$\overline{OA'} = \sqrt{x^2+y^2}$$



$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OA'}^2 + \overline{AA'}^2} = \sqrt{(x^2+y^2)+z^2}$$

ESERC: Equazione della superficie sferica con centro in $(1,2,3)$ e raggio 1.

SOLUZ.

I punti $P=(x,y,z)$ che stanno nella sup. sferica devono avere distanza da $A=(1,2,3)$ $= 1$

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2, z-3)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = 1$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 1^2}$$

I punti della sfera sono invece rappresentati da

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \le 1$$

Dati $n \in \mathbb{N}$ vettori $\underline{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$

$\vdots$

$\underline{v}_n = (v_{n1}, v_{n2}, v_{n3})$

di $\mathbb{R}^3$ dico che $\underline{w}$ è una loro comb. lineare tramite gli scalari $a_1, \dots, a_n$ se

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n =$$

$$= (a_1v_{11}, a_1v_{12}, a_1v_{13}) + \dots + (a_nv_{n1}, a_nv_{n2}, a_nv_{n3})$$

$$= (a_1v_{11} + \dots + a_nv_{n1}, a_1v_{12} + \dots + a_nv_{n2}, a_1v_{13} + \dots + a_nv_{n3})$$

Esempio

$\underline{v}_1 = (1, -3, 2)$ $\quad \underline{v}_2 = (4, 3, 1)$

$\underline{v}_3 = (0, 1, -1)$

Comb. lineare tramite $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 5$

$$\underline{w} = 2(1,-3,2) - 1(4,3,1) + 5(0,1,-1) =$$

$$= (2,-6,4) + (-4,-3,-1) + (0,5,-5) =$$

$$= (-2,-4,-2)$$

Dipendenza lineare / Indipendenza

DEF 1.

Dirò che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti se almeno uno di essi si può rappresentare come combinazione lineare degli altri:

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ t.c. } \underline{v}_k = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_{k-1} \underline{v}_{k-1} + a_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + a_n \underline{v}_n$$

o equivalentemente:

DEF. 2

esiste una comb. lineare

$$a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$$

con non tutti i coefficienti $a_1, \dots, a_n = 0$ che rappresenta il vettore nullo $\underline{0}$ (in $\mathbb{R}^3$: $\underline{0} = (0,0,0)$).

Problema: $\underline{v}_1 = (1,1,0)$, $\underline{v}_2 = (1,0,1)$, $\underline{v}_3 = (0,1,1)$

sono linearmente dipendenti?

SOLUZ:

$\exists (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ t.c.

$$a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3 = (0,0,0) ?$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+a_2=0 \\ a_1+a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a_2 \\ -a_2+a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a_2 \\ a_2=a_3 \\ 2a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=0 \\ a_3=0 \end{cases}$$

Quindi visto che l'unica soluzione del sistema è $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$ i 3 vettori non sono linearmente dipendenti.

$$\begin{cases} a_1+a_2=0 \\ a_1-a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a_2 \\ -a_2-a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a_2 \\ a_2+a_3=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

In questo caso ci sono ∞ soluzioni della forma: $t(-1,1,-1)$

Questo sistema nasce dall'aver considerato

$$(a_1+a_2, a_1-a_3, a_2+a_3) = (0,0,0)$$

Ho visto che:

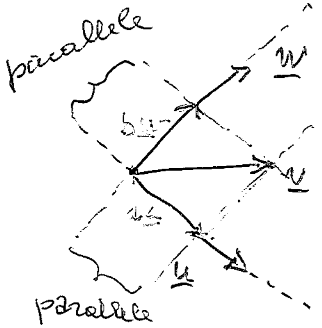
$$a_1(1,1,0) + a_2(1,0,1) + a_3(0,-1,1) = (0,0,0)$$

è risolubile da una terna $\neq (0,0,0)$

$\Rightarrow (1,1,0), (1,0,1), (0,-1,+1)$ sono lin. dipendenti.

In $\mathbb{R}^3$, 3 vettori sono dipendenti se e solo se stanno nello stesso piano.

In $\mathbb{R}^3$ 4 o più vettori sono sempre dipendenti.



Posso scomporre $\underline{v}$ lungo le due direzioni individuate da $\underline{u}$ e $\underline{w}$!

$\underline{v} = a\underline{u} + b\underline{w}$

nel piano ogni terna di vettori è dipendente

ES1 PAG 9

$\underline{v} = (1,2,3)$, $\underline{w} = (3,-1,2)$ $\qquad \theta = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$?

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\,|\underline{w}|\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|} = \frac{(1,2,3)\cdot(3,-1,2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{1\cdot 3+2(-1)+3\cdot 2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{3-2+6}{14} = \frac{1}{2}$$

$\theta \in [0,\pi]$ quindi posso applicare la funz. inversa arccos.

$$\theta = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

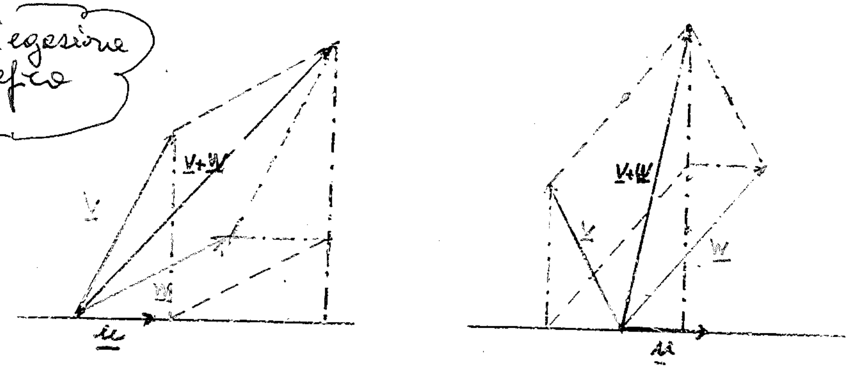
$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Prodotto scalare di due vettori $\underline{v}, \underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cos\alpha \qquad$ ove $\alpha = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$, $\alpha \in [0,\pi]$.

- commutativo
- distributivo : $\underline{u}\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{u}\cdot\underline{w} \qquad \forall \underline{u},\underline{v},\underline{w}$

spiegazione grafica



$\cancel{|\underline{u}|}\,|\underline{v}+\underline{w}|\cos(\widehat{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}) \overset{\text{TESI}}{=} \cancel{|\underline{u}|}\cdot|\underline{v}|\cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}) + \cancel{|\underline{u}|}\,|\underline{w}|\cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{w}})$

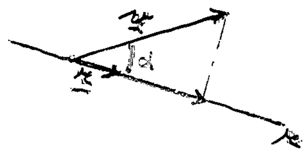
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v},\underline{w}$: $(t\,\underline{v})\cdot\underline{w} = t\,(\underline{v}\cdot\underline{w})$

- $\underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|\cdot|\underline{v}|\cos 0 = |\underline{v}|^2$

- $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$ e $\underline{v}\neq\underline{0}, \underline{w}\neq\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

Proiezione ORTOGONALE di un vettore $\underline{v}$ su una retta r (COMPONENTE VETTORIALE di $\underline{v}$)

$$\left[\underline{v}\cdot\left(\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right)\right]\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$



In termini di componenti:

se $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$$\underline{v}\cdot\underline{w} = (v_1\underline{i} + v_2\underline{j})\cdot(w_1\underline{i} + w_2\underline{j}) = v_1\underline{i}\cdot(w_1\underline{i}+w_2\underline{j}) + v_2\underline{j}\cdot(w_1\underline{i}+w_2\underline{j}) =$$
$$= v_1\underline{i}\cdot w_1\underline{i} + v_1\underline{i}\cdot w_2\underline{j} + v_2\underline{j}\cdot w_1\underline{i} + v_2\underline{j}\cdot w_2\underline{j} =$$
$$= v_1 w_1(\underline{i}\cdot\underline{i}) + v_1 w_2(\underline{i}\cdot\underline{j}) + v_2 w_1(\underline{j}\cdot\underline{i}) + v_2 w_2(\underline{j}\cdot\underline{j}) =$$
$$= v_1 w_1 + 0 + 0 + v_2 w_2 = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{W} = (w_1, w_2, w_3)$: $\underline{v}\cdot\underline{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

ES1 Trovare l'angolo tra i due vettori $\underline{v} = (1,2,3)$ e $\underline{w} = (3,-1,2)$:

$$1\cdot 3 + 2(-1) + 3\cdot 2 = \underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cos\alpha = \sqrt{1+4+9}\sqrt{9+1+4}\cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos\alpha =$

In generale:

ES2 Trovare un vettore ortogonale a $\underline{v} = (-1,2,1)$ e a $\underline{W} = (3,1,4)$ di modulo 1.

$\underline{u} = (x,y,z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff$

$\underline{u} \perp \underline{w} \iff$

$|\underline{u}| = ..$

ES3 I vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dell'esercizio precedente sono indipendenti?

Sì poiché $\underline{u}$ non è complanare con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (che non sono uno multiplo dell'altro) $\Rightarrow$ si individuano 3 direzioni indipendenti.

Trovare $\underline{u}$ ortogonale a $\underline{v} = (-1,2,1)$ e a $\underline{w} = (3,1,4)$ e di modulo 1.

$\underline{u} = (x,y,z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff \underline{u}\cdot\underline{v} = 0$

e

$\underline{u} \perp \underline{w} \iff \underline{u}\cdot\underline{w} = 0$

$$\begin{cases} (x,y,z)\cdot(-1,2,1) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(3,1,4) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$ sist. lineare omogeneo di 2 equaz. in 3 incognite

$$\begin{cases} x = 2y + z \\ 6y + 3z + y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y + z \\ 7y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$ $\Rightarrow$ i vettori che vanno bene hanno la forma $(x,y,z) = (-t,-t,t)$

Un vettore di questo tipo ha modulo 1 $\iff \sqrt{(-t)^2 + (-t)^2 + t^2} = 1$

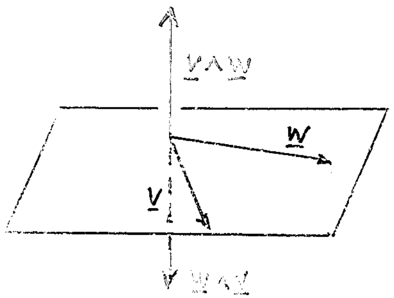
$3t^2 = 1 \qquad t^2 = \frac{1}{3}$ $\left\langle \begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Due vettori soluzione:

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$.

Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \operatorname{sen} \alpha$
- $\underline{v} \wedge \underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo
  $\underline{w} \wedge \underline{v} = - \underline{v} \wedge \underline{w}$
- $(t\underline{v}) \wedge \underline{w} = t(\underline{v} \wedge \underline{w})$
- $\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}$
- distributivo
  $\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}$

Geometricamente $|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$

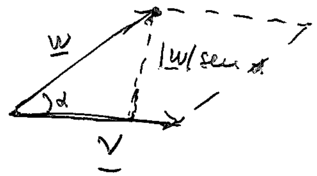
$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ .....

Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \wedge (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) =$ DISTR.

$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$

Es 2 pag 5 $\quad \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \wedge \underline{w}}{|\underline{v} \wedge \underline{w}|}$ oppure il suo opposto



$|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}|\, \underbrace{|\underline{w}| \operatorname{sen} \alpha}$

= area del parallelogramma con lati $\underline{v}$ e $\underline{w}$

$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{0}$, $\underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{0}$, $\underline{k} \wedge \underline{k} = \underline{0}$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$ $\quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$ $\quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$