$f(x) = 4x - (x+1)\ln[(x+1)^2]$ Studiare la funzione!

I.D. $(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -1$: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - (-\infty)(+\infty) = [-\infty+\infty]$

$$= \lim_{x\to+\infty} -(x+1)\ln[(x+1)^2]\left(\underbrace{\frac{4x}{-(x+1)\ln(x+1)^2}}_{\to 0}+1\right) =$$

$= -(-\infty)(+\infty) = +\infty$

~~senza~~ asintoto obliquo perché $f(x)$ va a $+\infty$ come $(x+1)\ln(x+1)^2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - (+\infty)(+\infty) = [\infty-\infty] = -\infty$

stesso ragionamento

$$\lim_{x\to-1^{\mp}} 4x - (x+1)\ln(x+1)^2 = -4 + \lim_{x\to-1} -(x+1)\ln(x+1)^2 \underset{\boxed{x+1=t}}{=}$$

$$= -4 + \lim_{t\to0^{\mp}} t\ln(t^2) \underset{\boxed{t=\frac{1}{s}}}{=} -4 + \lim_{s\to\mp\infty}\frac{1}{s}(-\ln s^2) = 0-4$$

$$f'(x) = 4 - 1\cdot\ln(x+1)^2 - \cancel{(x+1)}\cdot\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)^2}} =$$

$= 2 - \ln(x+1)^2 \geq 0 \iff \ln(x+1)^2 \leq 2$

$\iff 0 < (x+1)^2 \leq e^2$

$-e \leq x+1 \leq e$

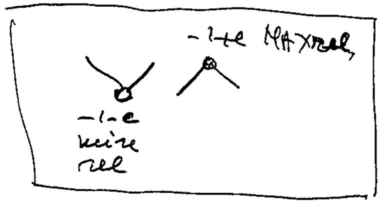
$-1-e \leq x \leq -1+e$

funzione decrescente in $(-\infty, -1-e)$

e in $(-1+e, +\infty)$

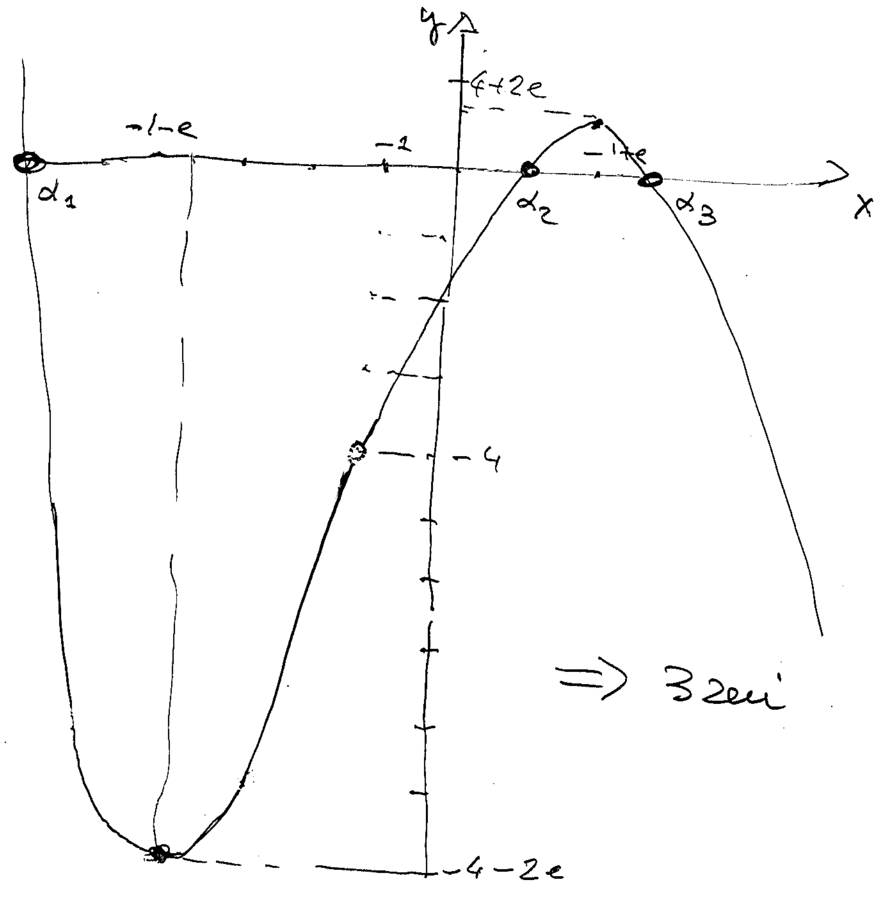
crescente in $(-1-e, -1)$

e in $(-1, -1+e)$



$f(-1\pm e) = -4 \pm 4e - (\pm e)\ln(\pm e)^2 =$

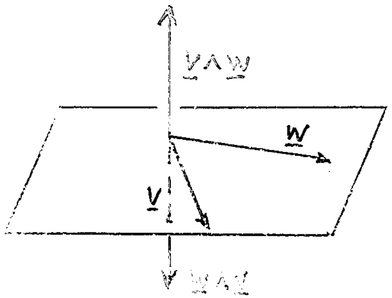
$= -4 \pm 4e \mp 2e = -4 \pm 2e$



$\Rightarrow$ 3 zeri

Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin \alpha$
- $\underline{v} \wedge \underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo
  $\underline{w} \wedge \underline{v} = - \underline{v} \wedge \underline{w}$
- $(t\underline{v}) \wedge \underline{w} = t(\underline{v} \wedge \underline{w})$
- $\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}$
- distributivo
  $\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}$

geometricamente $|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ .....

Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \wedge (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) =$ DISTR.

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \underline{k}$$

Es. pag 5 $\quad \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \wedge \underline{w}}{|\underline{v} \wedge \underline{w}|}$ oppure il suo opposto

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$

$\underline{w} = (w_1, w_2, w_3) = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}$

$\underline{v} \wedge \underline{w} \overset{\text{DISTR.}}{=} v_1 \underline{i} \wedge \underline{w} + v_2 \underline{j} \wedge \underline{w} + v_3 \underline{k} \wedge \underline{w} =$ DISTR.

$= \overset{=0}{v_1 \underline{i} \wedge w_1 \underline{i}} + v_1 \underline{i} \wedge w_2 \underline{j} + v_1 \underline{i} \wedge w_3 \underline{k} +$

$+ v_2 \underline{j} \wedge w_1 \underline{i} + \overset{=0}{v_2 \underline{j} \wedge w_2 \underline{j}} + \boxed{v_2 \underline{j} \wedge w_3 \underline{k}} +$

$+ v_3 \underline{k} \wedge w_1 \underline{i} + \boxed{v_3 \underline{k} \wedge w_2 \underline{j}} + \overset{=0}{v_3 \underline{k} \wedge w_3 \underline{k}} =$ OMOGENEITÀ

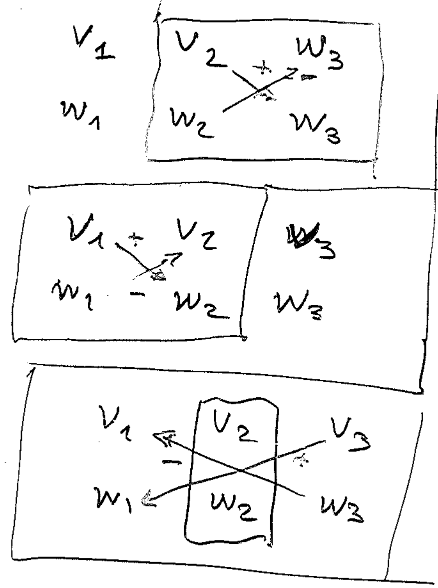
$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$
$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$

$\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$
$\underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$

$= (v_1 w_2 - v_2 w_1) \underline{k} + (v_2 w_3 - v_3 w_2) \underline{i} +$

$+ (v_3 w_1 - v_1 w_3) \underline{j} =$

$= (v_2 w_3 - v_3 w_2 \, , \, v_3 w_1 - v_1 w_3 \, , \, v_1 w_2 - v_2 w_1)$



$\Rightarrow$ SIMBOLOGIA

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \longmapsto v_1 w_2 - v_2 w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \overset{\text{DEF}}{=:}$$

determinante di $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}$

Per calcolare il prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ scrivo la tabella

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

e da essa estraggo le 3 tabelle quadrate che si ottengono eliminando ordinatamente la 3ª la 2ª e la 1ª colonna, ne calcolo il det. e considero la terna che ha la 1ª e 3ª componente = al 1° e 3° determinante e la 2ª = all'opposto del 2° determinante:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

Esempio calcolare il prodotto vettoriale di $\underline{v} = (1, 0, 1)$ e $\underline{w} = (1, -1, 2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1, -[2-1], 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) = (1, -1, -1)$$

Come verifico se ho fatto errori grossolani? Almeno verificare che "$\underline{v} \wedge \underline{w}$" (ma lo è?) sia $\perp \underline{v}$ e $\perp \underline{w}$

$\underline{v} = (1, 0, 1)$

$\underline{w} = (1, -1, 2)$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (1, -1, -1)$

$\underline{v} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (1, 0, 1) \circ (1, -1, -1) = 1 + 0 - 1 = 0$

$\underline{w} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (1, -1, 2) \circ (1, -1, -1) = 1 + 1 - 2 = 0$

L'ortogonalità funziona!

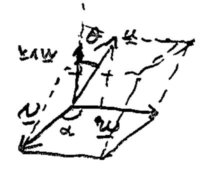
Può servire nei testi gli esercizi in cui serve trovare un vettore $\perp$ ad altri due.

Significato geom. del prodotto misto $|\underline{u} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w})|$: numero ≥ 0

VEDI pag 7

$|\underline{u}| \cdot |\underline{v} \wedge \underline{w}| \, |\cos\theta|$ $\quad \theta$ tra $\underline{u}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$

$|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \, |\underline{w}| \operatorname{sen} \alpha$ $\quad \alpha$ angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$



misura l'area del parallelogramma di lati $\underline{v}$ e $\underline{w}$

$|\underline{u}| \, |\cos\theta|$ rappresenta l'altezza di un parallelepipedo di lati $\underline{u}$, $\underline{v}$ $\underline{w}$

$|\underline{u}| \cos\theta$ →

$\Longrightarrow$ $|\underline{u} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ misura il volume di tale parallelepipedo.

Prodotto misto $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$

$|\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ geometricamente esprime:

Vedi fondo pag 6

Il volume del parallelepipedo di lati $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ si annulla se e solo se i ~~lati~~ vettori sono tra di loro dipendenti

quindi si annulla se e solo se:

$\Rightarrow$ algoritmo per stabilire se 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ sono dipendenti: calcolarne il prodotto misto: se $=0$ sono dipendenti
$\neq 0$ sono indipendenti

Se $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$: DETERMINANTE DELLA MATRICE $\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix}$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1 \left(v_2 w_3 - v_3 w_2 \right) + u_2 \left(v_3 w_1 - v_1 w_3 \right) + u_3 \left(v_1 w_2 - v_2 w_1 \right)$$

Questa scrittura si chiama determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA CON I VETTORI:

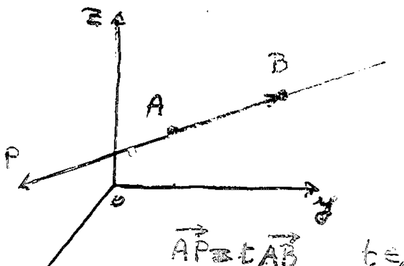
Equazioni parametriche della retta

una retta è nota:

- dati due suoi punti distinti $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$

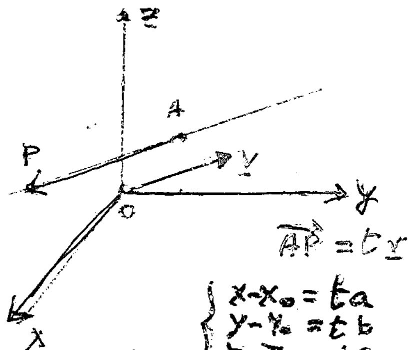
oppure

- dato un suo punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e una direzione $\underline{v} = (a, b, c)$ cui la retta è parallela



$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) \end{cases}$$



$\overrightarrow{AP} = t\underline{v}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$

Es 1 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(1,-1,1)$ e $B=(0,1,-1)$.

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

ERRORE SUL TESTO: EQUAZIONE CARTESIANA della retta

Es 2 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(2,1,3)$ e "parallela" al vettore $\underline{v}=(1,-3,0)$

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

Es 3 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A=(3,1,2)$ e ortogonale alle due rette di equazioni $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$ e

$\frac{x-1}{2}=3y-1=\frac{4z+1}{3}$

Vedi pag 11

Es 4 Il sistema $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 4x+y-z=2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio di dimensione 3? Se sì trovarne i COSENI DIRETTORI (def a pag 12)

$A=(1,-1,1)$ $\quad B=(0,1,-1)$ eq. parametriche della retta per A e B

$P=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AB} \doteq (0-1,\ 1-(-1),\ -1-1) = (-1,\ 2,\ -2)$

$\overrightarrow{AP} = (x-1,\ y+1,\ z-1)$

$$\begin{cases} x-1=t(-1) \\ y+1=t(2) \\ z-1=t(-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$\boxed{P=A+t\overrightarrow{AB}}$$

Trovare una rappresentazione che non contenga il parametro:

$$\begin{cases} \boxed{t=1-x} \\ y=-1+2(1-x) \\ z=1-2(1-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=1 \\ -2x+z=-1 \end{cases}$$

---

r passante per $A=(2,1,3)$ e parallela alla retta di equazioni $s\begin{cases} x=t \\ y=-3t \\ z=0 \end{cases}$

$r \parallel s$ significa che ha lo stesso vettore direzione $\underline{v}=(1,-3,0)$

$$r: \begin{cases} x=2+1t \\ y=1+(-3)t \\ z=3+0\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=3 \end{cases}$$

retta per $A = (3,1,2)$ e $\perp$ alle due rette di equazioni

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases} \qquad S_2 \equiv \frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3} \quad (*)$$

La retta r avrà equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = 3 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 2 + ct \end{cases}$$

con la condizione che (a,b,c) sia $\perp$ $\underline{v}_{S_1} = (1,-1,2)$ e $\underline{v}_{S_2}$ $? = (24,4,9)$

$$(a,b,c) = \underline{v}_{S_1} \wedge \underline{v}_{S_2} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 24 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 24 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-17, -(9-48), 4+24) = (-17, 39, 28).$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 3 - 17t \\ y = 1 + 39t \\ z = 2 + 28t \end{cases}$$

La retta S_2 può essere riscritta come:

$$(*) \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 3y-1 \\ 3y-1 = \frac{4z+1}{3} \end{cases}$$

ma è più comodo osservare che in ogni membro delle 3 uguaglianze è contenuta una sola variabile e in ciascuna diversa

$$\frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ 3y-1 = t \\ 4z+1 = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1/3 + 1/3\, t \\ z = -1/4 + 3/4\, t \end{cases}$$

$$\underline{v}_{S_2} = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \Leftarrow$$

$$\underline{v} = (1, -1, 1)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{w} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{ha modulo 1}$$

$$\boxed{\underline{w} \cdot \underline{i}} = |\underline{w}| \cdot |\underline{i}| \cos \widehat{\underline{w}\underline{i}} = \cos \widehat{\underline{w}\underline{i}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

è la 1ª componente di $\underline{w}$

$\underline{w} \cdot \underline{j} = \cos \widehat{\underline{w}\underline{j}}$ è la 2ª " "

$\underline{w} \cdot \underline{k} = \cos \widehat{\underline{w}\underline{k}}$ 3ª

I coseni direttori della retta di direzione $\underline{v}$ sono esattamente i 3 coseni sopra evidenziati cioè le 3 componenti di $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$