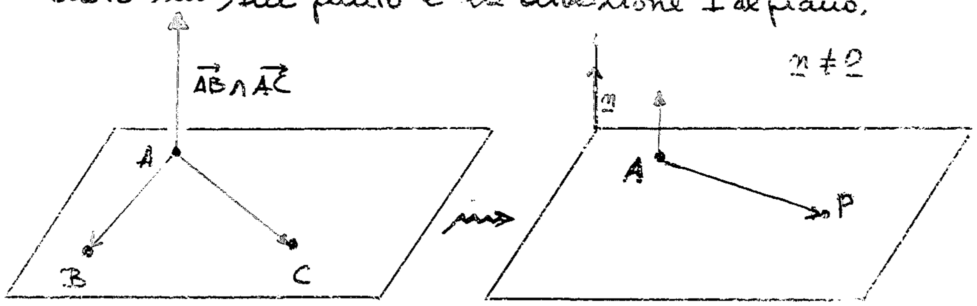
Equazione cartesiana del piano

⇒ un piano è noto
- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione ⊥ al piano.



$\overrightarrow{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$\underline{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

Se $\underline{n} = (a, b, c)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$:

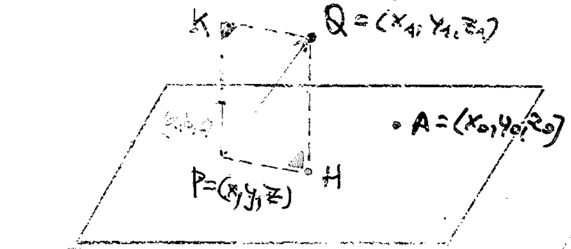
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- $(a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0 \iff$ il piano passa per l'origine
- $a = 0 \implies$ ecc
- $a = 0$ e $b = 0 \implies$ ecc

vedi pag 3

Distanza di un punto da un piano

vedi pag 6-7



$$\overline{QH} = \overline{PK} = \frac{|\underline{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\underline{n}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} \cdot |\overrightarrow{PQ}|$$

$$= \frac{|a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

con $(x, y, z) \in$ piano $\Rightarrow$

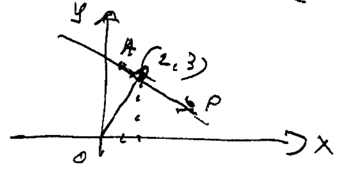
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$$\Rightarrow = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Significato del Termine noto,
Se $|(a, b, c)| = 1$: a meno del segno, rappresenta la distanza da $(0,0,0)$

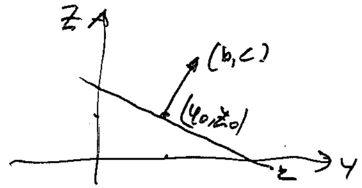
ANALOGIA:
Nel piano $\quad 2(x - 3) + 3(y - 1) = 0 \quad$ rappresenta una retta che passa per $(3, 1) = A$. Posso riscrivere l'eq.:

$$(2, 3) \cdot ((x - 3), (y - 1)) = 0$$



che dice che il vettore $(2, 3)$ è ortogonale ai vettori $\overrightarrow{AP}$ che si ottengono congiungendo un punto fissato A con un punto variabile P sulla retta.

$a = 0 \qquad b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$



$\underline{n} = (0, b, c)$

Nello spazio rappresenta un piano parallelo all'asse x

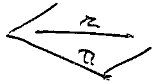
Infatti l'asse x ha eq. parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

il piano in esame ha eq. $\quad b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

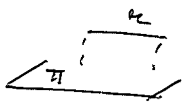
Trovo le intersezioni piano-retta:

$$b(0 - y_0) + c(0 - z_0) = 0 \qquad (*)$$

allora:

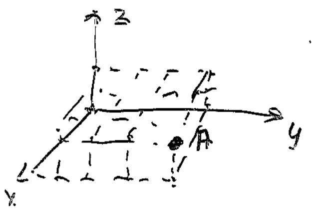


o $\quad by_0 + cz_0 = 0 \quad \Rightarrow$ tutti i punti della retta stanno nel piano



o $\quad by_0 + cz_0 \neq 0 \quad \Rightarrow$ non esiste alcun punto della retta che appartiene al piano, poiché non esiste un parametro $t \in \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione $(*)$

$a=0 \quad b=0$ ⟹ $c \neq 0$ $\qquad c(z-z_0)=0$ ⟹ $z-z_0=0$ $\qquad \underline{n}=(0,0,c)$

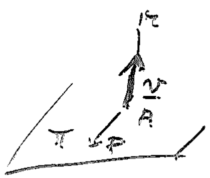


⟹ insieme dei punti che hanno la stessa ordinata di A ⟹ piano parallelo a xy passante per A

che ha equaz. $z=0$

ESERCIZI

1) Scrivere l'eq. del piano passante per $A=(1,0,1)$ e ortogonale alla retta di equazioni



$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

vettore direz. della retta $\underline{v}=(3,-1,2)$

Il piano deve essere $\perp \underline{v}$

$(3,-1,2)\cdot(x-1,\ y-0,\ z-1)=0$

cioè $3(x-1)-y+2(z-1)=0$

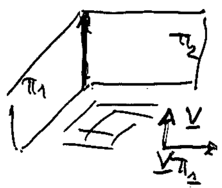
$$\boxed{3x-y+2z=5}$$

NOTARE: il vettore direzione di una retta è "parallelo alla retta"; il vettore direz. di un piano è "perpendicolare" al piano

2) Scrivere l'equazione del piano passante per $O=(0,0,0)$ e perpendicolare ai due piani di equazione rispettivamente:

$\pi_1: \ 2x-y=7$

$\pi_2: \ y+3z=5$



$$\begin{cases} \underline{v}\cdot\underline{v}_{\pi_1}=0 \\ \underline{v}\cdot\underline{v}_{\pi_2}=0 \end{cases}$$

$\underline{v}=\underline{v}_{\pi_1}\wedge\underline{v}_{\pi_2}$

il vettore direzione del piano, $\underline{v}$, deve essere ortogonale al vettore direzione di ciascuno degli altri 2 piani

$\underline{v}_{\pi_1}=(2,-1,0)$

$\underline{v}_{\pi_2}=(0,1,3)$

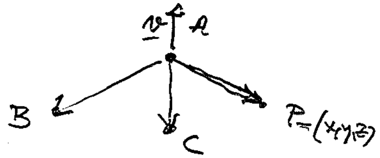
$$\underline{v}=\underline{v}_{\pi_1}\wedge\underline{v}_{\pi_2}=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\1&3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(-3,-6,2)$$

$\underline{v}\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0)=0$ cioè

$$\boxed{-3x-6y+2z=0}$$

3) Piano π passante per $A=(1,0,1)$, $B=(1,1,0)$, $C=(0,1,1)$.



$\underline{v}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}$

$\underline{v}\cdot\vec{AP}=0$

$\vec{AP}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC})=0$: prodotto misto $=0$!

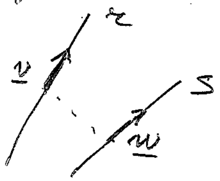
$$\begin{vmatrix} \vec{AP} \\ \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-0)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

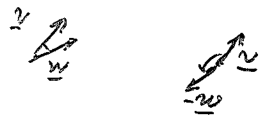
$$\boxed{(x-1)+(y-0)+(z-1)=0} \Rightarrow (1,1,1)\circ(x-1,\, y-0,\, z-1)=0$$

$\Rightarrow$ Vettore direz. del piano $(1,1,1)$

Angoli tra rette, tra piani e tra rette e piani



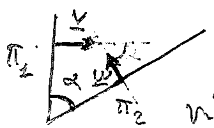
anche sghembe.
l'angolo tra le due rette è l'angolo "acuto" tra i 2 vettori



$$\hat{\underline{v}\underline{w}} = \arccos \frac{\underline{v}\circ\underline{w}}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|}$$ può essere ottuso

$$\hat{rs} = \arccos \frac{|\underline{v}\circ\underline{w}|}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|}$$ angolo non ottuso

Angolo tra due piani: α

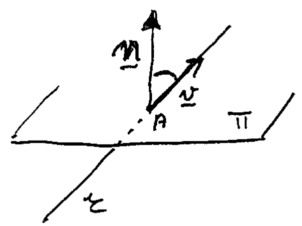


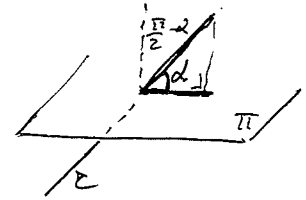
visti dall'alto! cioè in sezione con un piano $\perp$ alla retta data

angolo "non ottuso" tra i 2 vettori direzione:

$$\alpha = \arccos \frac{|\underline{v}\circ\underline{w}|}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|}$$

Angolo tra piano e retta

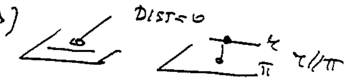




$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\underline{n}\circ\underline{v}|}{|\underline{n}|\,|\underline{v}|}$$

Distanze

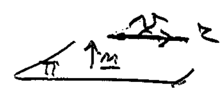
- tra due punti $A=(a_1,a_2,a_3)$ $B=(b_1,b_2,b_3)$:
  $|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
- di un punto da una retta
- di un punto da un piano — vedi pag 1
- di due rette se le 2 intersecano. Se sono sghembe è + difficile
- di una retta da un piano $(\wedge)$



- di due piani: ha senso se sono // (*): coincide con la dist. di un punto da un piano.

(*) individuati quindi da vettori direzione PROPORZIONALI $(a',b',c') = (ka,kb,kc)$ per $k\in\mathbb{R}$ opportuno

$(\wedge)$ retta e piano sono // se e solo se $\underline{v}\circ\underline{n}=0$



(*) due rette possono essere

parallele: $\underline{v}' = k\underline{v}$ e intersezione vuota
coincidenti: $\underline{v}' = k\underline{v}$ e un punto in comune
incidenti: $\underline{v}' \neq k\underline{v}\ \forall k$ e 1 punto in comune
sghembe: $\underline{v}' \neq k\underline{v}\ \forall k$ e intersezione vuota

Distanza di $(0,0,0)$ dal piano di equazione $2x+3y-z=5$

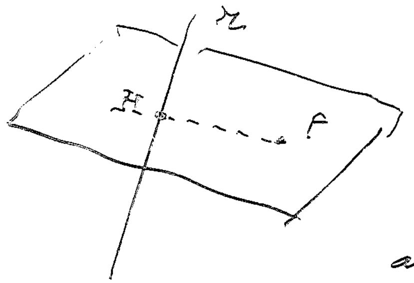
Riscrivo l'eq. come:

$$2x+3y-z-5=0 \qquad \underline{v}=(2,3,-1)$$

$$\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0-0-5|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{+5}{\sqrt{14}}$$

Dist. di un punto da una retta

$$P=(0,0,0) \qquad r=\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 3t \\ z = 2-t \end{cases}$$



Come trovo PH?
Calcolo il piano per P e $\perp r$.
$\underline{v}_r=(5,3,-1)$ sarà anche il vettore direttore del piano che avrà equazione:

$$5(x-0)+3(y-0)-1(z-0)=0$$

Calcolo l'intersezione H di tale piano con r

$$\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ x=1+5t \\ y=3t \\ z=2-t \end{cases} \qquad \begin{cases} 5+25t+9t-2+t=0 \\ x=1+5t \\ y=3t \\ z=2-t \end{cases}$$

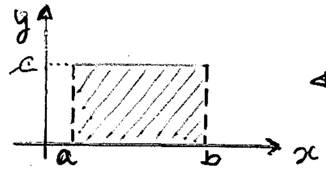
$$\begin{cases} t=\dfrac{-3}{35} \\ x=1-\cancel{15}/35 = 4/7 \\ y=-9/35 = -9/35 \\ z=2-3/35 = 67/35 \end{cases} \Rightarrow H=\left(\frac{4}{7},\frac{-9}{35},\frac{67}{35}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{PH}=\sqrt{\frac{4^2}{7^2}+\frac{9^2}{35^2}+\frac{67^2}{35^2}}}$$

Integrale Definito (versione Cauchy-Riemann)

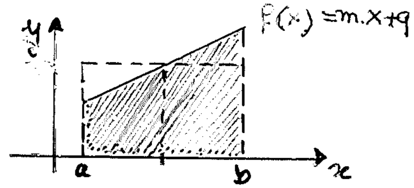
Come calcolare l'area di una figura mistilinea? (o, corrispondentemente, come calcolare il LAVORO di una FORZA variabile nel tempo nello spostamento lungo una retta ... e analoghi problemi fisici?).

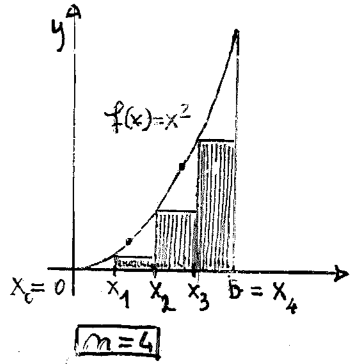
Cominciamo dal facile:



$\leftarrow \mathcal{A}=(b-a)\cdot|c|$

$$\mathcal{A}=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \longrightarrow$$





METODO DI ESAUSTIONE

$\mathcal{A} \approx S_n$ = somma dell'area dei rettangoli di base $\frac{b-a}{n}$ e altezze: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$

Approssimazione per difetto.

Se la si vuole per eccesso prendere come altezze $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

$$S_4=\frac{b}{4}\left(0^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3b}{4}\right)^2\right)=\frac{b}{4}\cdot\frac{b^2+4b^2+9b^2}{4^2}=\frac{b^3}{4^3}\cdot(1+4+9)$$

$$S_n=\frac{b}{n}\left(0^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2+\dots+\frac{(n-1)^2b^2}{n^2}\right)=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Si sa:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Se suddivido sempre più finemente posso pensare

$$\mathcal{A}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{b^3}{3}$$