(1 RICHIESTA)

$$\int \frac{1}{4-3\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{4-3t} =$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx = 2t\,dt\end{array}}$$

Divisione del numeratore per il denominatore.

$$\begin{array}{r|l} 2t & -3t+4 \\ \hline -2t+\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline \frac{8}{3} & \end{array}$$

$$= \int \frac{-\frac{2}{3}(4-3t)+\frac{8}{3}}{4-3t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int -1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4-3t}\,dt = \frac{2}{3}\left(-t - \frac{4}{9}\int\frac{-3\,dt}{4-3t}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-t-\frac{4}{9}\ln|4-3t|\right)+c.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}} = \frac{1}{[0^0]} = 1$$

poiché:

$$x^{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}} = e^{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x}$$

$$x=\frac{1}{t} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to+\infty} e^{\operatorname{sen}\frac{1}{t^{1/3}}\cdot\ln\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{\ln t}{t^{1/3}}} =$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{1}{t^{1/3}} \sim \frac{1}{t^{1/3}}}$$

l'esponente $\to 0^-$ per confronto di ∞

$$= e^{-0} = 1$$

TORNIAMO ALLA DEFINIZIONE di INTEGRALE DEFINITO

In generale, definisco un'ente nuovo che servirà per calcolare le aree MA NON SEMPRE IN MANIERA AUTOMATICA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

- divido $[a,b]$ in n parti uguali (non fondamentale, ma rende i conti + facili) di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$

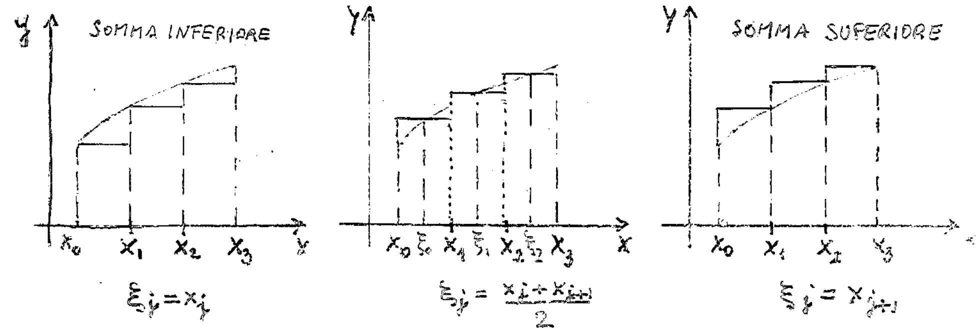
  Cioè considero in $[a,b]$ i punti

  $$x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \dots,\ x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b$$

- in ogni intervallo $[x_0,x_1], \dots, [x_j,x_{j+1}], \dots, [x_{n-1},x_n]$ scelgo un punto $\xi_0, \dots, \xi_j, \dots, \xi_{n-1}$ (anche un estremo, se voglio)
- Calcolo

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{h} = h\cdot\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) = (b-a)\frac{\sum f(\xi_j)}{n} = S_n$$

che chiamo: SOMMA di CAUCHY-RIEMANN



Tre diverse somme di Cauchy-Riemann

Si dimostra che esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e che tale limite è indipendente dalla scelta dei ξ_j.

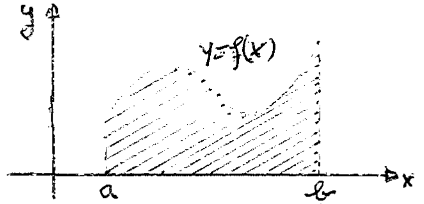
Esso è detto integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e denotato

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

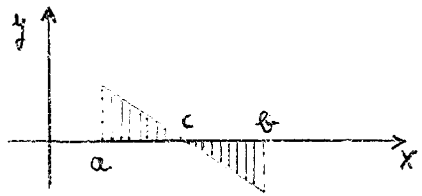
: è un numero!

Interpretazione geometrica

Se $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del TRAPEZOIDE racchiuso tra $y=f(x)$, l'asse x e le rette $x=a$, $x=b$

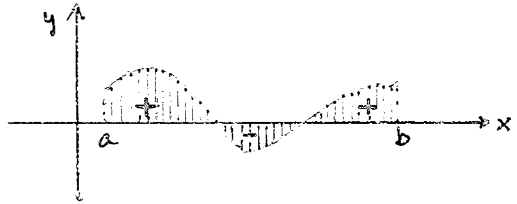


Ma se f(x) cambia segno questo non è più vero



qui $\int_a^b f(x)dx = 0$ mentre l'area no

cioè l'integrale è la somma delle aree prese con il segno + se la regione sta sopra l'asse x e con il segno − se la regione sta sotto l'asse x



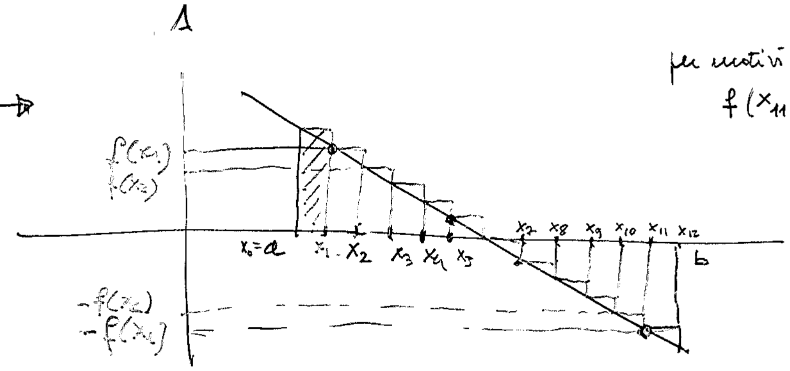
Per il calcolo delle aree VEDI DOPO.

Proprietà

1. Additività degli intervalli di integrazione

$\forall c \in [a,b]$: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

È possibile generalizzare a un c esterno all'intervallo (purché f sia continua in $[c,b]$ se $c<a$, in $[a,c]$ se $c>b$) definendo $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$



per motivi di simmetria: $f(x_{11-k}) = f(x_{k+1})$

Scelgo ξ_j t.c. $f(\xi_j)$ sia max in $[x_j, x_{j+1}]$ $\Rightarrow \xi_j = x_j$

$$S_{12} = \frac{a-b}{12}\left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_5) + 0 + (-f(x_5)) - \dots - f(x_1)\right) =$$

$$= \frac{a-b}{12}\, f(x_0)$$

$$S_n = \frac{a-b}{n} \cdot f(x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-b}{n} f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

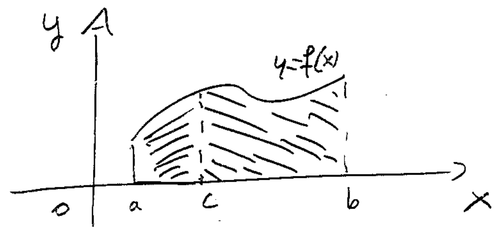
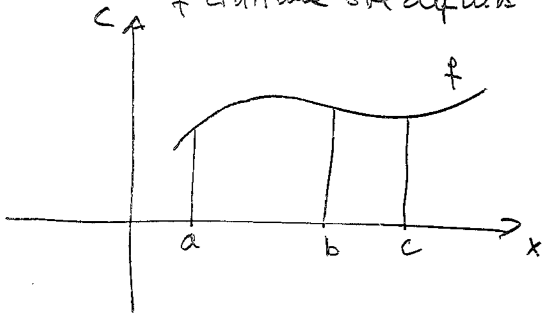


figura per ricordare la proprietà di additività degli intervalli di integraz.

⇒ Generalizzazione

VEDI PAG 5 per la spiegazione



se voglio che valga

(*) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

so cos'è — so cos'è — non so cos'è

Devo definire $\int_c^b f(x)\,dx$ in maniera coerente

$[a,c] \ni b$: per la propr. di additività degli intervalli di integraz

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

cioè

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (**)$$

Se voglio che (*) sia la stessa cosa di (**) basta prendere

$$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$$

VEDI 2a figura a pag 6

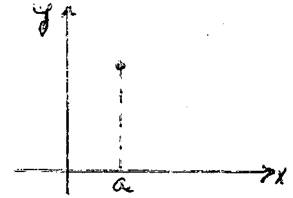
cioè se $c>b$ l'integrale "da c a b" è l'opposto dell'integrale (di C-R) "da b a c"

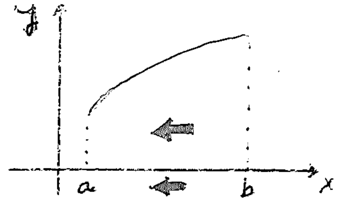
Lo stesso ragionamento se $c<a$....

E se $c=a$ (oppure $c=b$)? Se voglio che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$ devo porre $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Vedi 1a fig. a pag 6





2. Additività rispetto alle funzioni

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Omogeneità

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Positività

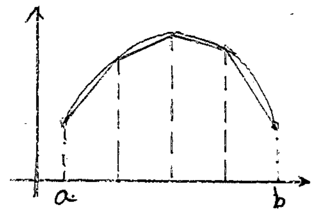
$\forall x\in[a,b]: f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ se $a<b$

5. $\forall x \in [a,b]: f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

6. $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Calcolo di integrali definiti

1. METODI NUMERICI. Per calcolare un'approssimazione dell'integrale piuttosto che usare somme superiori e inferiori è meglio usare il metodo dei TRAPEZI che consiste nel prendere ξ_j in modo che $f(\xi_j)$ sia $\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}$



(la funzione f è CONTINUA: vale il teorema dei valori intermedi) cioè nell'approssimare il grafico con segmenti che ne congiungono n+1 punti.

Allora

$$\bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right)$$

È come pesare $\frac{1}{2}$ sugli estremi e 1 nei punti interni

Poiché $\bar{S}_n \to \int_a^b f(x)dx$ si può approssimare l'integrale con la precisione voluta.

Ci sono anche altri metodi più sofisticati che convergono più velocemente (Cavalieri-Simpson ad es.).

2. METODO ESATTO.

Suppongo di essere in grado di calcolare una primitiva $G(x)$ della funzione integranda $f(x)$ in $[a,b]$:

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Posso calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ quando così:

- cerco una primitiva $G(x)$ di $f(x)$
- Calcolo $G(b)$ e $G(a)$
- sottraggo $G(b)-G(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a).$$

Infatti vale il

$\boxed{\text{T. F. del CALCOLO}}$ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ cont in $[a,b]$.

La funzione $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ $(c, z \in [a,b])$ è derivabile e $\forall z \in [a,b]$ si ha $F'(z) = f(z)$.

(che proveremo in seguito)

... Cioè $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$.

Come sono fatte le altre primitive di $f(z)$?

(Lagrange) $\Longrightarrow$ $G(z) - F(z) = k$: costante

Allora posso calcolare $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ se conosco una primitiva $G(z)$ di $f(z)$.

Infatti

$$G(z) - F(z) = k$$

deve valere $\forall z \in [a,b]$; e c'è un punto in cui io conosco il valore di $F(z)$: $z = c$

$$F(c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$$

Quindi in particolare

$$G(c) - F(c) = k \quad \text{cioè}$$

$$G(c) - 0 = k \quad \text{cioè}$$

$$k = G(c)$$

$$\Longrightarrow \quad G(z) - G(c) = F(z)$$

Cioè $$\int_c^z f(x)\,dx = G(z) - G(c)$$

$c = a,\ z = b \implies$ FORMULA x il CALCOLO ESATTO dell'integrale.

$$\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx$$

cerco una primitiva:

$$\frac14\int \frac{4(e^x+x)}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \qquad (4e^x+2x^2-1)' = 4(e^x+x) \qquad = \frac14 \ln|4e^x+2x^2-1|+k$$

scelgo

$$G(x)=\frac14\ln|4e^x+2x^2-1|$$

Considero

$$G(1)-G(0)=\frac14\left(\ln(4e+2-1)-\ln(4-1)\right)=$$

$$=\frac14\ln\frac{4e+1}{3}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \frac14\ln\frac{4e+1}{3}$

$$\int_{-1}^{\sqrt3} \arctan x\,dx =$$

Calcolo $\displaystyle\int \arctan x\,dx = \underbrace{x\arctan x}_{\text{pp con ff arctan x}} - \frac12\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx$

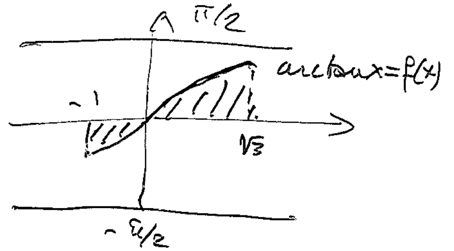
$$= x\arctan x - \frac12\ln(1+x^2)+c$$

$$=\left[x\arctan x-\frac12\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{\sqrt3}=$$

$$=\sqrt3\arctan\sqrt3-\frac12\ln4-\left(-1\arctan(-1)-\frac12\ln2\right)=$$

$$=\sqrt3\cdot\frac{\pi}{3}-\ln2-\frac{\pi}{4}+\frac12\ln2=\frac{4\pi\sqrt3-3\pi}{12}-\frac12\ln2$$

E se invece volessi calcolare l'area?



$$\text{Area}=\int_0^{\sqrt3}f(x)\,dx-\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$$

primitiva:

$$\int f(x)\,dx = x\arctan x-\frac12\ln(1+x^2)+c$$

$$\text{Area}=\left[x\arctan x-\frac12\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt3}+\left[x\arctan x-\frac12\ln(1+x^2)\right]_0^{-1}=$$

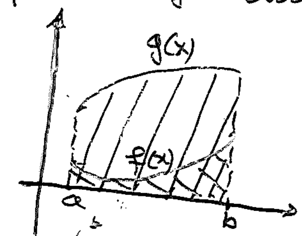
$$=\sqrt3\cdot\frac{\pi}{3}-\ln2-0+0+\left(-1\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac12\ln2-0+0\right)=$$

$$=\sqrt3\,\frac{\pi}{3}-\ln2+\frac{\pi}{4}-\frac12\ln2=$$

$$=\frac{4\sqrt3-3}{12}\pi-\frac32\ln2$$

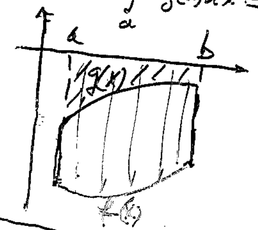
Con ciò abbiamo calcolato l'area della regione di piano compresa tra il grafico di arctan x e l'asse x nell'intervallo $[-1,\sqrt3]$.

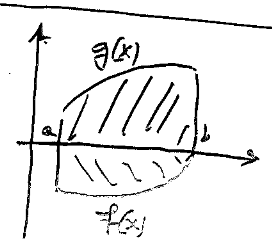
In generale vedi pag 11 + questi disegni "evocativi"



$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx-\int_a^b -g(x)\,dx=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$





$$\int_a^b g(x)\,dx+\int_a^b -f(x)\,dx=$$

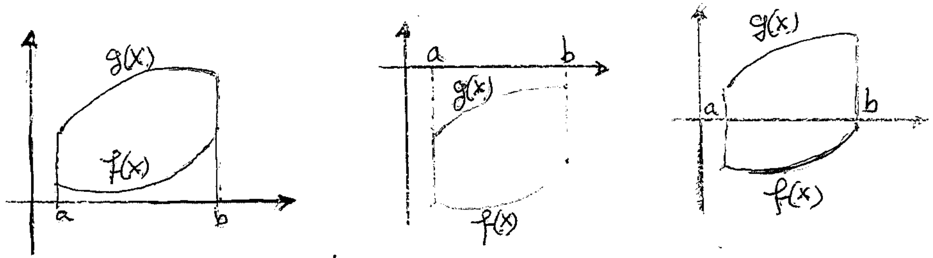
$$=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

In generale per calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di 2 funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con

$$f(x) \le g(x) \quad \text{in } [a,b]$$

e le rette $x=a$, $x=b$; CALCOLARE

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$



eccetera ...

Se i 2 grafici si intersecano corrispondentemente a $x=c$ e

$$g(x) \ge f(x) \quad \text{per } x\in[a,c]$$
$$g(x) \le f(x) \quad \text{per } x\in[c,b]$$

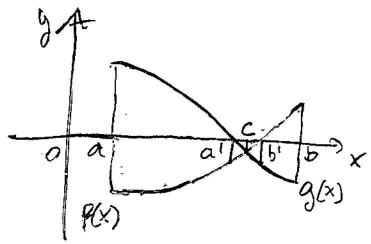
Calcolare

$$\int_a^c (g(x)-f(x))\,dx + \int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$

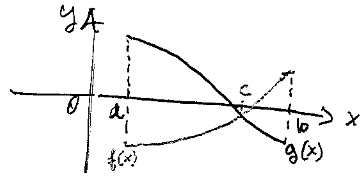
Alcuni ESEMPI (AREA di REGIONI SIMMETRICHE)

1. Calcolare l'area del trapezoide delimitato dall'asse x e dalla funzione $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1,1]$.

2. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell'intervallo $[-1,1]$.
COSA CAMBIA se scelgo l'INTERVALLO $[-1,2]$?



Problema: trovare l'area della regione compresa tra i grafici di $g(x)$ e $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$.
In questa figura si presentano apparentemente 4 situazioni:
in $[a,a']$: $f<0\le g$
in $[a',c]$: $f\le g\le 0$
in $[c,b']$: $g\le f\le 0$
in $[b',b]$: $g<0\le f$
Ma la sola differenza significativa è quella tra i 2 intervalli $[a,c]$ ove $g\ge f$ e $[c,b]$ ove $f\ge g$:

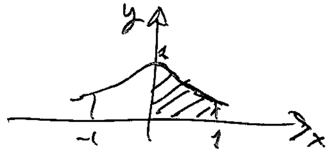


$$\text{Area} = \int_a^c (g(x)-f(x))\,dx + \int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$

Area del trapezoide compreso tra x

$f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ e $x=-1$ e $x=1$

$f(x)$ è pari ($=f(-x)$!) e $[-1,1]$ è simmetrico rispetto all'origine



$$\text{Area} = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 4\left[\arctan e^x\right]_0^1 = 4\left(\arctan e - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2}{e^{-x}(e^{2x}+1)}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \boxed{\begin{matrix} e^x=t \\ e^x dx = dt\end{matrix}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\arctan t + c = 2\arctan e^x + c$$