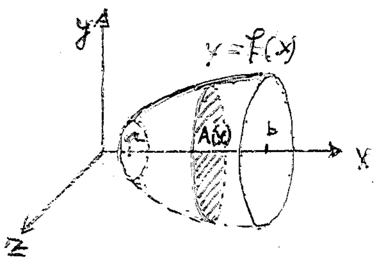
Qualche applicazione degli integrali definiti

1. Calcolo di aree (VEDI) A FIANCO UN ESEMPIO →

2. Calcolo del volume di un solido.

Se possibile conoscere il valore dell'area di tutte le sezioni del solido coi piani ortogonali a una direzione fissata



il volume è ....

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

In particolare se il solido si ottiene per rotazione attorno all'asse x di $y=f(x)$ risulta

$$A(x) = \pi (f(x))^2$$

... il volume di ogni cilindretto: $dV = \pi (f(x))^2\,dx$

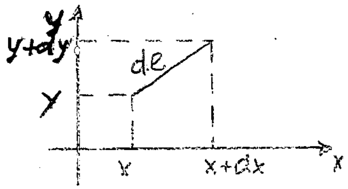
e quindi il volume totale: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$

Es 1. $f(x)=\cos x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow V=\int_0^{\pi/2} \pi(\cos x)^2 dx =$ (VEDI PAG 3)

Es. 2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$ $\Rightarrow V=\int_0^1 \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$
(SEMISFERA)
$= \pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{3}\right)$

3. Calcolo della lunghezza di un arco di grafico

Ipotesi: $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a,b]$. Posto $y=f(x)$



$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1+(f'(x))^2\right)} =$$
$$= \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ (commento a pag 4)

$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco tra $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ES.3 $f(x)=\mathrm{Ch}\,x$ con $a=0$, $b=h>0$. (VEDI PAG.4)

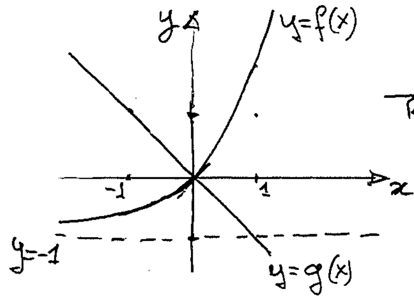
$f(x) = e^x - 1$

$g(x) = -x$

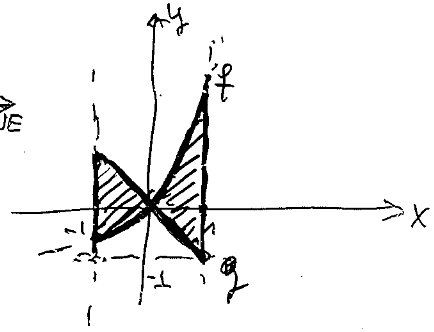
↓

GRAFICI

Trovare l'area della regione limitata del piano delimitata dai 2 grafici e dalle rette di eq. $x=-1$, $x=1$



REGIONE →



$f(x) \geq g(x)$??

f crescente in $[-1,1]$
g decrescente in $[-1,1]$ $\Rightarrow$

i due grafici si intersecano solo in un punto: $(0,0)$

$f(x) \geq 0 \geq g(x)$ in $[0,1]$

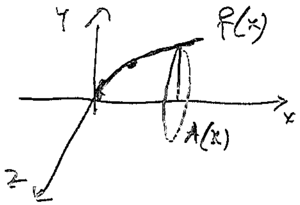
$g(x) \geq 0 \geq f(x)$ in $[-1,0]$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0} (g(x)-f(x))\,dx + \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx$$

Calcolo $\int (g(x)-f(x))\,dx = \int(-x-e^x+1)\,dx = -\frac{x^2}{2} - e^x + x + c$

$$\text{Area} = \left[-\frac{x^2}{2} - e^x + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + e^x - x\right]_0^1 =$$
$$= \left(-1 - \left(-\frac{1}{2} - e^{-1} - 1\right)\right) + \left(\frac{1}{2} + e - 1 - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + e^{-1} + \frac{1}{2} + e - 2 = e + e^{-1} - 1$$

Volume del solido ottenuto ruotando la "semiparabola" $y=\sqrt{x}$ intorno all'asse x nell'intervallo $[0,2]$



$$A(x)=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \qquad (x\geq 0)$$
$$dV=A(x)\,dx=\pi x\,dx$$
$$V=\int_0^2 dV=\int_0^2 \pi x\,dx=\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_0^2=$$
$$=2\pi$$

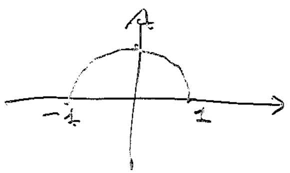
Se volessi volume nell'intervallo $[2,4]$.
$$V=\int_2^4 dV=\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_2^4=8\pi-2\pi=6\pi$$

ES. 2

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

semicirc. di raggio 1 centrata in $(0,0)$

Volume della figura di rotazione?

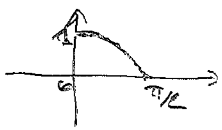


$$\int_{-1}^{1}\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=2\pi\int_0^1(1-x^2)\,dx=$$
$$=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$$
: Vol. della sfera di raggio 1

ES. 1

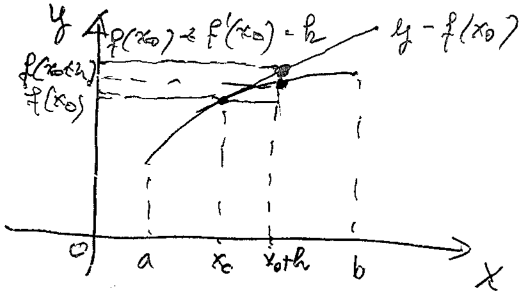
$f(x)=\cos x$

figura di rotazione nell'intervallo $[0,\pi/2]$, che volume ha?



$$\int_0^{\pi/2}\pi(\cos x)^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x\right]_0^{\pi/2}=$$
$$=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 0\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

$$\boxed{\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x+c}$$



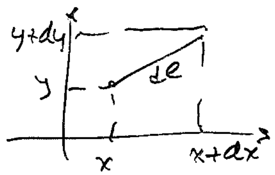
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x_0+h)-[f(x_0)+f'(x_0)h]$$
Tende a zero più velocemente di h : $=o(h)$

$$f'(x_0)\cdot h=dy \quad \text{differenziale} \qquad dy=f'(x_0)\,dx$$

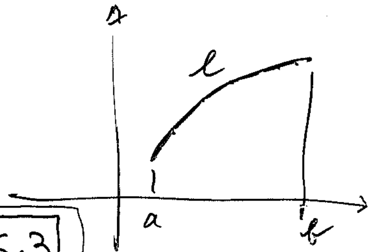
$$\boxed{y=g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1 \Rightarrow dy=1\cdot h=dx}$$

$$dy=f'(x)\,dx$$
$$(dx)^2+(dy)^2=(dx)^2+[f'(x)]^2(dx)^2=(dx)^2\left(1+(f'(x))^2\right)$$



$$dl=\sqrt{(dx)^2\left(1+(f'(x))^2\right)}$$

$$l=\int_a^b dl=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

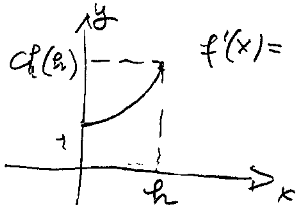


lunghezza dell'arco di grafico.

ES. 3

$$f(x)=\mathrm{Ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$
lunghezza dell'arco compreso nell'intervallo $[0,h]$

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{Sh}\,x$$



$$\int_0^h\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^h\sqrt{\frac{4+e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}\,dx$$
$$=\int_0^h\sqrt{(\mathrm{Ch}\,x)^2}\,dx=\int_0^h\mathrm{Ch}\,x\,dx=\left[\mathrm{Sh}\,x\right]_0^h=\frac{e^h-e^{-h}}{2}$$

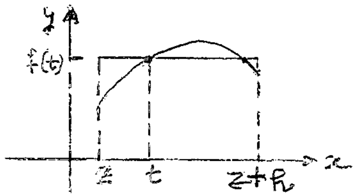
TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è CONTINUA su $[a,b]$ allora la "funzione integrale" $F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$ (dipendente dall'estremo di integrazione z e definita per ogni $c,z\in[a,b]$ ... per definizione di integrale) è DERIVABILE per ogni $z\in(a,b)$ e $F'(z)=f(z)$.

Dim. Bisogna provare: $\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$.

$$\left.\begin{array}{l} F(z)=\int_c^z f(x)\,dx \\ F(z+h)=\int_c^{z+h} f(x)\,dx=\int_c^z f(x)\,dx+\int_z^{z+h} f(x)\,dx \end{array}\right\}\Rightarrow F(z+h)-F(z)=\int_z^{z+h} f(x)\,dx$$

SE È VERO CHE per ogni z e $h>0$ tali che z e $z+h\in[a,b]$ ESISTE un t tra z e $z+h$ tale che

$$\int_z^{z+h} f(z)\,dz=f(t)\,h.$$



si ha

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{f(t)\,h}{h}=f(t)$$

e poiché t sta tra z e $z+h$, per $h\to 0^+$ si ha $t\to z^+$. Dunque

$$F'_+(z)=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\underset{\boxed{z\le t\le z+h}}{=}\lim_{t\to z^+} f(t)=f(z).$$

per la CONTINUITÀ di f

È sostanzialmente il teorema del valore medio del calcolo integrale (che viene provato a pag 7). L'unico problema per la derivata è che h può essere >0 o <0.

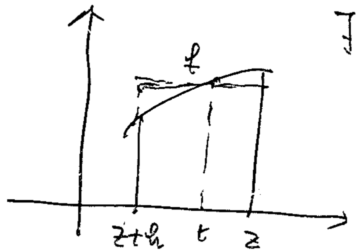
Nel primo caso O.K.

Nel secondo per il T. del V.M. esiste $t\in(z+h,z)$ tale che

$$\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx=f(t)\,(z-(z+h))=-f(t)\,h\Rightarrow\int_z^{z+h} f(x)\,dx=h\,f(t)$$

O.K.

Questa seconda parte è rifatta anche a pag 6



$\exists t:$ $\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx=f(t)\cdot(z-(z+h))=$

TEOR. del valor medio

$=-h\,f(t)$

$$\int_z^{z+h} f(x)\,dx=-\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx=-(-h\,f(t))=h\,f(t)$$

come nel caso in cui $h>0$

$$\Rightarrow\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{h\cdot f(t)}{h}=f(t)$$

$$F'_-(z)=\lim_{h\to 0^-}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\underset{\boxed{z+h\le t\le z}}{=}\lim_{t\to z^-} f(t)\underset{\boxed{\text{Cont.}}}{=}f(z)$$

$F'_-(z)=F'_+(z)\Rightarrow$ la derivata esiste!

ILLUSTRAZIONE di come funziona il teorema del valor medio del calcolo integrale applicato a $\lim_{h\to 0^-}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ (cioè con $h<0$)

Dal teor. fondamentale del calcolo si riduce la formula per il calcolo esatto dell'integrale, poiché il teorema dice che in $[a,b]$ $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ è una primitiva di $f(z)$.

Allora se $G(z)$ è una primitiva "comoda" di $f(z)$ $G(z)$ e $F(z)$ differiscono per una costante k:

$$G(z) - F(z) = k \qquad \forall z \in (a,b)$$

In particolare

$$k = G(c) - F(c) = G(c) - 0$$

$\Rightarrow F(z) = G(z) - G(c)$

In particolare per $c = a$, $z = b$: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

GIÀ VISTO LA LEZIONE SCORSA

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCOLO INTEGRALE.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA in $[a,b]$, esiste $t \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(t)$.

Dim. Dalla continuità in $[a,b]$: $f(x)$ ha massimo M e minimo m: ASSOLUTI

$$m \le f(x) \le M$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

Definizione di integrale:

$S_n = \frac{b-a}{n} \underbrace{(m + \dots + m)}_{n \text{ volte}}$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

cioè

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Dalla continuità di f in $[a,b]$ (Teorema dei valori intermedi): esiste un $t \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(t).$$

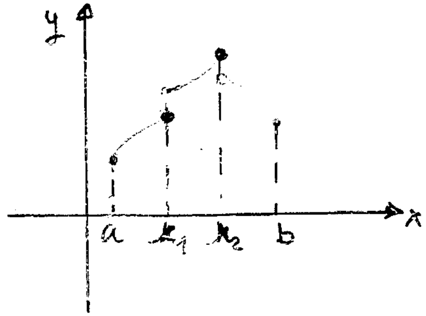
c.v.d.

INTEGRALI GENERALIZZATI

1. Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ non è continua su tutto $[a,b]$ ma presenta solo un numero finito $k-1$ di discontinuità A SALTO definisco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad \text{ove}$$

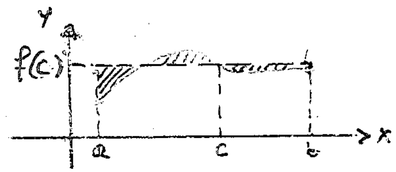
$x_0 = a$, $x_k = b$, $x_1, \dots, x_{k-1}$ sono i punti di discontinuità



Il calcolo può essere fatto sfruttando – su ogni intervallo in cui è continua – i metodi visti precedentemente.

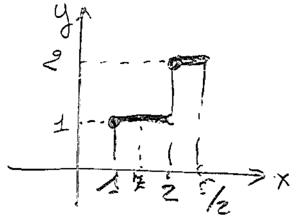
ATTENZIONE. Ci sono due teoremi teoricamente fondamentali che valgono SOLO per funzioni continue:

TEOR. DEL VALOR MEDIO: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$



TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è derivabile in (a,b) e $F'(z) = f(z)$.

$$F(z) = \int_1^z \lfloor x \rfloor \, dx = \begin{cases} \text{se } z \in [1,2) : \int_1^z 1 \cdot dx = z - 1 \\ \text{se } z \in [2, 5/2] : \int_1^2 1\, dx + \int_2^z 2 dx = \\ \quad = 1 + (z-2)\cdot 2 = 2z - 3 \end{cases}$$

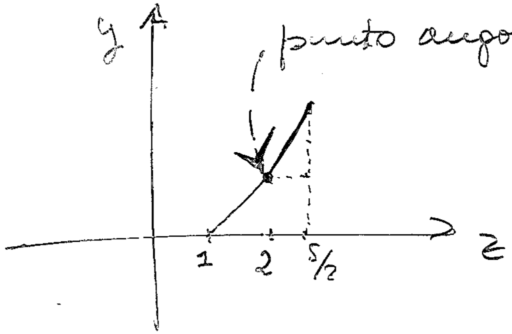


Quindi

$$F(z) = \begin{cases} \text{se } z \in [1,2) : & z - 1 \\ \text{se } z \in [2, 5/2] : & 2z - 3 \end{cases}$$

TRACCIO il GRAFICO

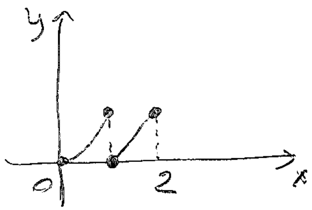
punto angoloso in $z=2$



RIPRESO QUI PER ESTESO

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{in } [0,1] \\ x-1 & \text{in } (1,2] \end{cases}$$

Ridefinisco f in modo che sia continua anche in $x=1$:
$\boxed{\bar{f}(x) = x - 1 \text{ in } [1,2]}$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 \bar{f}(x)\,dx = $$
$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = $$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Esempio di calcolo di un integrale generalizzato (diverso da quello a inizio pag 10)

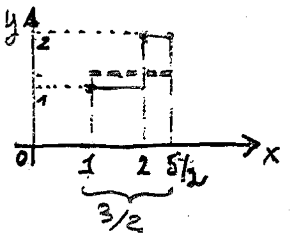
Ad es. se $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $[a,b] = [1, 5/2]$, posso calcolare

$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor dx = \int_1^2 1 \cdot dx + \int_2^{5/2} 2 dx = 1 + 1 = 2,$$

ma non esiste $c \in [1, 5/2]$ tale che

$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor dx = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \lfloor c \rfloor$$

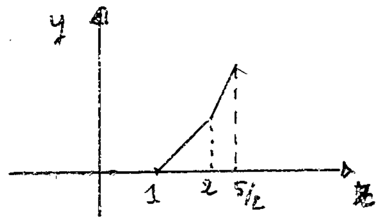
poichè vorrebbe dire: $\lfloor c \rfloor = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$!



Ancora: esiste la funzione $F(z) = \int_1^z f(x)\,dx = \begin{cases} z-1 & \text{se } z \in [1,2) \\ 2z-3 & \text{se } z \in [2, 5/2] \end{cases}$

ma in $x = 2$ non è derivabile

$$\int_1^2 dx + \int_2^z 2 dx = 1 + 2z - 4$$



2. $f(x)$ definita e continua in $[a,b)$ ma NON LIMITATA in $[a,b)$ $\left(\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty \right)$

Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI II SPECIE)

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito (o infinito) dico che l'integrale (IMPROPRIO DI II SPECIE) generalizzato è CONVERGENTE (o DIVERGENTE) (ecc: terminologia dei limiti)

Esempio: cruciale

$$\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \ln|b| - \ln|\varepsilon| \\ \frac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{INTEGR DIVERG.} \\ \text{se } k > 1 & +\infty \\ \text{se } k < 1 & \frac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

Vedi per esteso a pag 11

In realtà qui $f(x)$ è def. e continua in $(0, b]$ ...

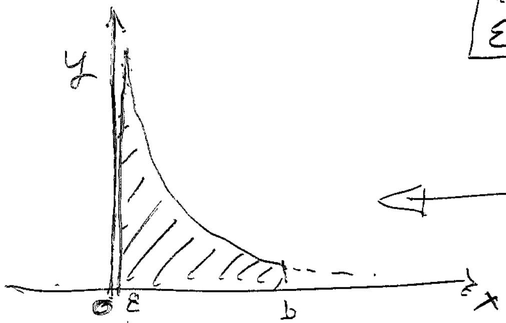
$$\int \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{se } k=1: & \ln|x| + c \\ \text{se } k\neq 1: & \dfrac{x^{-k+1}}{-k+1} + c \end{cases}$$

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{se } k=1 & \left[\ln|x|\right]_\varepsilon^b = \ln b - \ln \varepsilon \\ \text{se } k\neq 1 & \left[\dfrac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_\varepsilon^b = \dfrac{b^{-k+1} - \varepsilon^{-k+1}}{-k+1} \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{se } k=1 & \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \ln b - \ln\varepsilon = +\infty \\ \text{se } k>1 & \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ \text{se } k<1 & \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} = \dfrac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

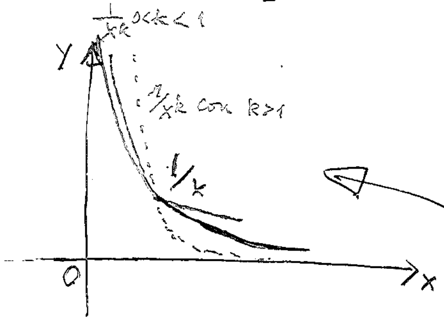
$\boxed{\begin{array}{l} 1-k<0 \\ \varepsilon^{1-k} \to +\infty \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} 1-k>0 \\ \varepsilon^{1-k} \to 0^+ \end{array}}$



GEOMETRICAMENTE:

se $k<1$ esiste finito il limite delle aree delle regioni di piano comprese tra asse x, $\frac{1}{x^k}$ e una parallela all'asse y: $x=\varepsilon$



Ricordare come sono i grafici di $\frac{1}{x^k}$ (al variare di $k>0$), rispetto all'asse y