Qualche altro esercizio:

1. Il valore dell' integrale definito $\int_1^e (\ln x)(1+\frac{1}{x})\,dx$ è
   (a) -1 (b) $3/2$ (c) 0 (d) $e+1$ (e) $e-1$

2. L'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3}$, dall'asse y e dalle rette $y=-9$ e $y=9$ è
   (a) $81/4$ (b) 13.5 (c) 0 (d) $=40.5$ (e) 36
   (l'unità di misura è il quadrato di lato 1)

3. Quanto vale $\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\,dx$?
   (a) $\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\sqrt{2}$ (b) $\frac{62}{5}$ (c) $-\frac{203}{2}$ (d) $\frac{242}{5}$
   (e) $\frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{14}{3}$

4. l'area della regione di piano compresa tra l'asse x il grafico di $f(x) = \frac{3(3\ln x-1)^4}{2x}$ e le rette $x=e^{1/3}$ e $x=e$ vale
   (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{31}{3}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$ (e) $\frac{4}{5}$

5. Sia $f(x)=5x^2(2x^3-1)^4$. L'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ vale
   (a) $-\frac{7}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$ (e) $\frac{5}{8}$.

Riassunto delle puntate precedenti:

Integrale definito (Cauchy Riemann)

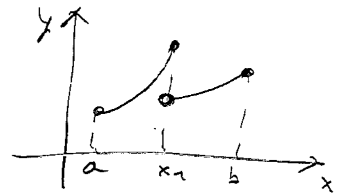
Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

posso definire $\int_a^b f(x)\,dx$.

- Se f non è continua su $[a,b]$?
  se le discontinuità sono: o eliminabili o a salto finito
  E in numero finito: $x_1,\dots,x_{n-1}$
  $a=x_0$, $b=x_n$

allora dico l'integrale generalizzato

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$



(integrale di Riemann)

Negando una delle 2 condizioni:

1) f sia definita e cont. su un insieme chiuso

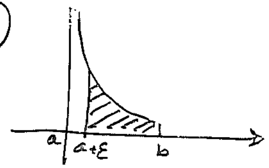
2) f sia def e cont. su un insieme limitato

estendo le nozioni di partenza per

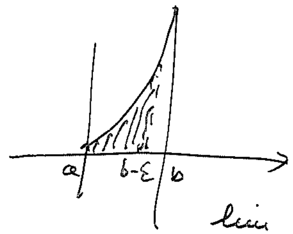
1) integrale improprio di II specie: f definita su un semiaperto e illimitata

2) integrale improprio di I specie: f definita su un illimitato

(1)



$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

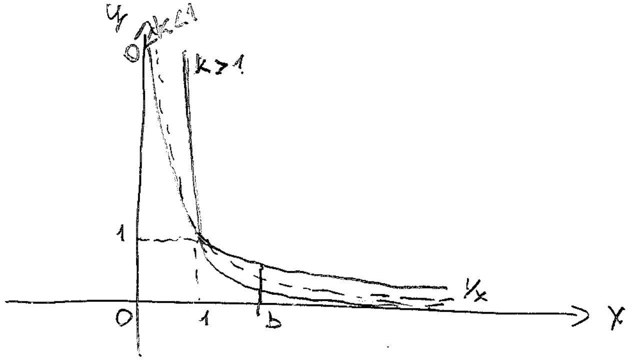


$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

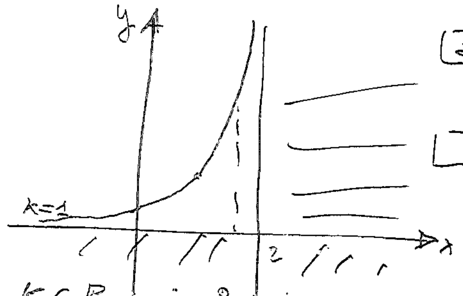
Esempio fondamentale (già discusso la volta scorsa)

$\int_{0+}^{b} x^{-k}\,dx$? $k>0$

$$= \lim_{z\to 0+}\int_z^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k>1 : +\infty \\ k=1 : +\infty \\ k<1 : \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^b = \frac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$



$$\int_0^{2-}\frac{1}{(2-x)^k}\,dx = \lim_{z\to 2^-}\int_0^z \frac{1}{(2-x)^k}\,dx =$$



$\boxed{\text{se } k=1}$ $= \lim_{z\to 2^-} -\left(-\ln|2-0|+\ln|2-z|\right) = +\infty$

$\boxed{k\neq 1}$ $= \lim_{z\to 2^-}\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{(2-z)^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) =$

$= \begin{cases} \boxed{k>1} : +\infty \\ \boxed{0<k<1} : \frac{1}{-k+1}\cdot\frac{1}{2^{k-1}} \end{cases}$

$k\in\mathbb{R}$: $2-x>0 \Rightarrow x<2$

Calcolo di una primitiva:

$$\int\frac{1}{(2-x)^k}\,dx = \begin{cases} k=1 : -\ln|2-x| \\ k\neq 1 : \frac{-1}{(1-k)(2-x)^{k-1}} \end{cases}$$

$\left[\frac{1}{k-1}(2-x)^{1-k}\right]' = \frac{1-k}{k-1}\cdot(-1)(2-x)^{-k}$ VERIFICA

$\frac{1-k}{k-1}\cdot(-1) \to 1$

~~Esercizio~~: $\int_0^{2-}\frac{1}{(2-x)^k}\,dx =$

3. $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ f continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato.

Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI I SPECIE)

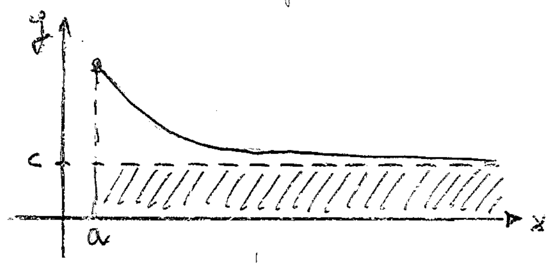
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

Esempio cruciale:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=1 : \lim_{\omega\to+\infty} \ln|\omega|-\ln|a| = +\infty \\ k<1 : \lim_{\omega\to+\infty} \frac{\omega^{1-k}-a^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ k>1 : \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1/\omega^{k-1} - a^{1-k}}{1-k} = \frac{a^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$

Vedi anche pag 5

NOTA BENE: perché questo integrale converga (cioè perché converga $\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} f(x)\,dx$) bisogna ALMENO che $f(x)\to 0$ allorché $x\to+\infty$



Vedi altre situazione a pag 5

ES.1) Si trovi il valore del seguente integrale generalizzato

$$\int_{16}^{+\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

vedi pag6

ES.2) Calcolare $\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx$

Vedi pag 7

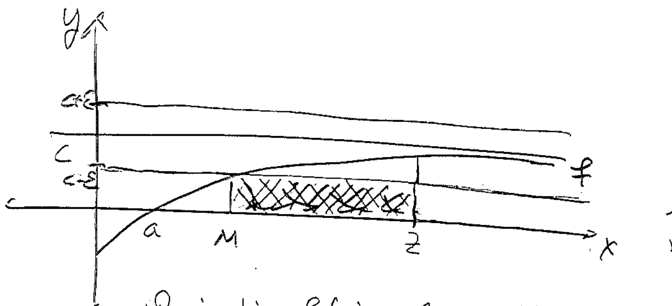
$f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ f cont. su $[a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^{z} f(x)\,dx$$

integrale improprio di I specie
(irregolari, divergenti o convergenti)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx \ ? \qquad a>0, \quad k>0$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_a^z \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \boxed{k=1} \ \lim_{z\to+\infty} \ln|z| - \ln|a| = +\infty \\ \boxed{k\neq 1} \ \lim_{z\to+\infty} \dfrac{z^{1-k} - a^{1-k}}{1-k} = \begin{cases} 0<k<1: & +\infty \\ k>1: & \dfrac{1}{k-1}\, a^{1-k} \end{cases} \end{cases}$$



Sia $f(x) \geq 0$ in $[a, +\infty)$.

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \neq 0$ esiste M tale che $\forall x > M \quad c - \frac{c}{2} < f(x) < c + \frac{c}{2}$

Quindi $f(x) > \frac{c}{2}$ e di conseguenza l'area del trapezoide delimitato da $f(x)$, $x = M$, $x = z$ e $y = 0$ è maggiore di quella del rettangolo di base $(z - M)$ e altezza $c/2$ $\Rightarrow \lim_{z\to+\infty} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq \lim_{z\to+\infty} \frac{c}{2}(z-M)$ ... l'integrale improprio diverge.

$\Rightarrow$ se il limite di $f(x)$ è $\neq 0$ l'integrale improprio di I^a specie non può convergere

ES.1) $$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

in $[16, +\infty)$ $\quad$ denom $\neq 0$ e quindi la funz è def. e continua

non solo: $\dfrac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0 \quad \forall x \in [16, +\infty)$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \int_{16}^{z} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

è crescente poiché $F'(z) = \dfrac{2+\sqrt{z}}{2\sqrt{z}+1}$
quindi ammette limite per $z \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$ il limite non può essere finito e in part. è $+\infty$ poiché $F(z)$ è crescente.

Se volessi fare i conti? Trovo una primitiva:

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}} \quad \int \frac{2+t}{2t+1} \cdot 2t\,dt =$$

$$= \int \frac{2t^2+4t}{2t+1}\,dt =$$

$$\begin{array}{l|l} 2t^2+4t & 2t+1 \\ \hline -2t^2 - t & t + 3/2 \\ 3t & \\ -3 - 3/2 & \end{array}$$

$$= \int \left(t + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t+1}\right) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \ln|2t+1| + c =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{4} \ln(2\sqrt{x}+1) + c$$

Quindi:

$$F(z)=\int_{16}^{z}\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx=\frac{z}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{z}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{z}-1)$$
$$-8+6-\frac{3}{4}\ln(9)$$

e per finire:

$$\lim_{z\to+\infty}F(z)=+\infty$$

ES.2)

$$\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$ | f. def. e cont. in $(0,+\infty)\Rightarrow$ int. improprio di 1ª e di 2ª specie

$$\|$$

$$\int_{0^+}^{a}x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx+\int_a^{+\infty}x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{con } a>0$$

1°) Calcolo "della" primitiva

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=-2e^{-\sqrt{x}}+c$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} -\sqrt{x}=t & \\ \sqrt{x}=-t & \Rightarrow \int -2e^{t}\,dt=-2e^{t}+c= \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-dt & \quad =-2e^{-\sqrt{x}}+c \\ \frac{1}{\sqrt{x}}dx=-2dt & \end{array}}$$

2°)
$$\int_z^a\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=-2\left[e^{-\sqrt{a}}-e^{-\sqrt{z}}\right]$$

$$\int_a^w\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=-2\left[e^{-\sqrt{w}}-e^{-\sqrt{a}}\right]$$

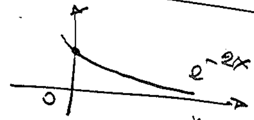
3°)
$$\lim_{z\to0^+}\int_z^a\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=-2\left[e^{-\sqrt{a}}-1\right]$$
$$\lim_{w\to+\infty}\int_a^w\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=-2\left[0-e^{-\sqrt{a}}\right]$$

4°) Sommo

$$2\left(1-e^{-\sqrt{a}}\right)+2\left(e^{-\sqrt{a}}\right)=2$$

ES.3)

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,\text{sen}\,e^{-x}\,dx=$$



$\text{sen}\,e^{-x}$ è limitata $\Rightarrow$ funz. integranda limitata

improprio di 1ª specie (e non di 2ª)

$$=\lim_{z\to+\infty}\int_0^z e^{-2x}\cdot\text{sen}\,e^{-x}\,dx=$$

$$=\lim_{z\to+\infty}e^{-z}\cos e^{-z}-\text{sen}\,e^{-z}-1\cos1+\text{sen}\,1=$$
$$=\text{sen}\,1-\cos1$$

$(>0$ ok.

Calcolo una primitiva di $e^{-2x}\,\text{sen}\,e^{-x}$

$$\int e^{-2x}\,\text{sen}(e^{-x})\,dx=-\int t\,\text{sen}\,t\,dt=$$ p.p. con f.f. t

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{-x}=t \\ -e^{-x}dx=dt \\ e^{-2x}=e^{-x}\cdot e^{-x} \end{array}}$$

$$=+t\cos t-\int1\cos t\,dt=t\cos t-\text{sen}\,t+c=$$
$$=\boxed{e^{-x}\cos e^{-x}-\text{sen}\,e^{-x}+c}$$

9

ES 3) Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x} \, dx$ (vedi pag 8)

ES 4) Quale delle seguenti uguaglianze è falsa?

(a) $\int_1^e x^{-2} dx = 1 - e^{-1}$ (b) $\int_{0+}^1 x^{-1/2} dx = 2$

(c) $\int_{-1}^e x^{-2} dx = -(1 + e^{-1})$ (d) $\int_{1/2}^{+\infty} x^{-2} dx = 2$

(f) $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2} dx = 4$

ES 5) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

ES 6) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$ $(k \neq 1)$

ES 5-6)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$$

in $[2, +\infty)$ funz integranda definita e continua.

1°) Calcolo una primitiva:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^k} dx \underset{\substack{\ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt}}{=} \int \frac{1}{t^k} dt = \begin{cases} \text{se } k \neq 1 & \frac{t^{1-k}}{1-k} + c = \\ \text{se } k = 1 & \ln|t| + c = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } k \neq 1 & \frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} + c \\ \text{se } k = 1 & \ln|\ln x| + c \end{cases}$$

Calcolo $\int_2^z \frac{1}{x(\ln x)^k} dx = \begin{cases} k \neq 1 & \frac{1}{1-k}\left[(\ln z)^{1-k} - (\ln 2)^{1-k}\right] \\ k = 1 & (\ln|\ln z| - \ln|\ln 2|) \end{cases}$

Calcolo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx = \lim_{z \to +\infty} F(z) = \begin{cases} \boxed{k>1} : 0 + \frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k} \\ \boxed{0<k<1} : +\infty \\ \boxed{k=1} : +\infty \end{cases}$$

N.B. $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^b f(x) dx$. è la definizione dell'integrale improprio di 1ª specie se l'intervallo è illimitato a sinistra.

E $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$ che cosa fa? Converge o diverge?

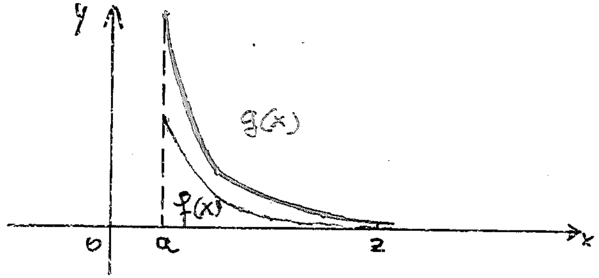
Non è facile calcolare una primitiva e quindi la funzione integrale e il suo limite per $z \to +\infty$.

L'idea è di procedere per CONFRONTO.

Ho una funzione $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è CRESCENTE

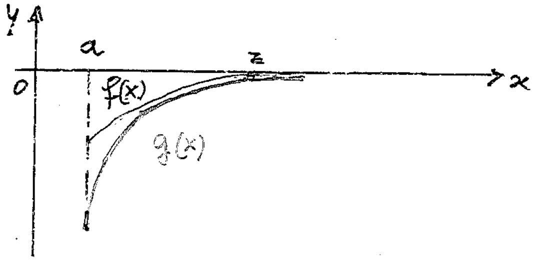
$\Rightarrow \lim_{z \to +\infty} F(z)$ esiste (finito o no)

Se esiste una funzione $g(x) \geq f(x)$ su tutto $(a, +\infty)$ e tale che $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito, allora (TEOR. del confronto) anche $\lim_{z \to +\infty} F(z)$ è finito



NOTA: l'area del TRAPEZOIDE di $g(x)$ è maggiore dell'area del TRAPEZOIDE di $f(x)$

Similmente se $f(x) \leq 0$ in $(a, +\infty)$ e $g(x) \leq f(x)$ su $(a, +\infty)$ con $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ finito, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge:



A rovescio: se $f(x) \geq 0$ e c'è una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(Tradurre nel caso negativo)

$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$

$G(z) = \int_a^z f(x)\,dx$

se $f(x) \leq g(x)$ in $[a, z]$ allora

$$F(z) \leq G(z)$$

Teorema del confronto sui limiti:

$$\lim_{z \to +\infty} F(z) \leq \lim_{z \to +\infty} G(z)$$

(i due limiti esistono in quanto $F(z)$ e $G(z)$ sono monotone). Quindi:

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} G(z)$ è finito

lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$ su $[1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge. Posso dedurre che

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge? NO. E infatti

il secondo integrale converge

Questo enunciato del teor del confronto non è simmetrico ... non vale "se e solo se"

Se $f(x) \geq 0$ (continua) in $[a,+\infty)$ e $g(x) > 0$ (continua) in $[a,+\infty)$ e se

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ finito
- $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è finito

INVECE se

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

TEOR. del CONFRONTO FATTO con i limiti (più semplice che con le disuguaglianze)

TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO

ADDIRITTURA se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ posso dire

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

AD ES. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_0^z e^{-x}\,dx = \lim_{z \to +\infty} 1 - e^{-z} = 1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x(1-x)} = 0.$$

ES.7) $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx$ converge ($\forall s \in \mathbb{R}$). Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^s e^{-x}}{x^{-k}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{s+k}}{e^x} = 0 \quad \forall k$$ e in particolare

per $k=2$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ converge, anche l'integrale assegnato converge

In maniera simile ci si comporta con gli integrali impropri di II specie:

ES. $\int_{0+}^1 e^{-x} x^s\,dx$ è un integrale improprio solo se $s<0$

Ora $e^{-x}x^s > 0$; $e^{-x} \to 1$ per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-x}x^s}{x^s} = 1$$

Allora, visto che $\int_{0+}^1 x^s\,dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$,

anche $\int_{0+}^1 e^{-x}x^s\,dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$.

Dunque resta definita una funzione:

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx \qquad \forall s>-1$$

detta funzione di Eulero che è tale che

$$\Gamma(n) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx = n!$$

$$\int_{0+}^1 e^{-x}x^s\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx$$