Si consideri la funzione $f(t)=\dfrac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}$.

Si utilizzino opportuni criteri (dopo averne verificato l'applicabilità) per stabilire se converge

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

1ª domanda: che integrale improprio è?

$(0,+\infty)$ è illimitato e perciò è almeno di 1ª specie

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^{5/2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{1/2}} = +\infty$$

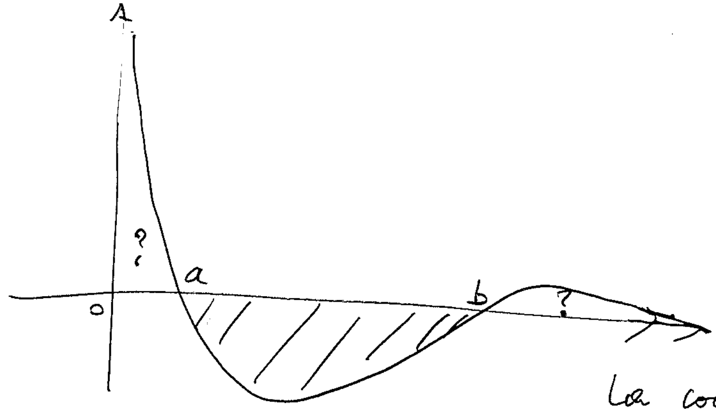
$\Rightarrow$ la funzione è illimitata in $(0,+\infty)$
l'integrale è anche improprio di 2ª specie

Per stabilire se converge basta che convergano i due integrali impropri di cui è somma:

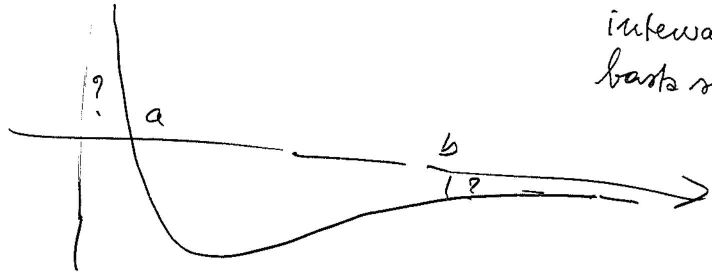
$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$$

ove $a>0$

Posso usare dei criteri di confronto se valgono certe condizioni: la continuità su $(0,a]$ e $[a,+\infty)$ e la costanza del segno in $(0,a]$ e in $[a,+\infty)$



La costanza del segno non è necessaria sull'intero intervallo di definizione: basta spezzarlo



Verifico che $f(t) = \dfrac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}$ è continua in $(0,a]$ e in $[a,+\infty)$ $(\forall a>0)$: in quanto rapporto di funzioni definite e continue su tali intervalli e con denominatore $t^{5/2}\neq 0$

Inoltre $f(t)\geq 0$ in ciascuno dei 2 intervalli

perché $t^{5/2}>0$ $\forall t\in(0,+\infty)$ e

$(\operatorname{sen} t)^2 \geq 0$ con $=0$ per $t=k\pi$

Sono verificate le condizioni per applicare i teoremi di confronto.

(3)

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}\, dt$$

Invento (se ci riesco) una funzione $g(t)$ tale che per $t \to +\infty$ si abbia $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = l$ finito e $\neq 0$

$g(t) = \frac{1}{t^k}$ se prendo $k = \frac{5}{2}$ ho il rapporto

$\frac{f(t)}{g(t)} = (\operatorname{sen} t)^2$ che non ha limite per $t \to +\infty$

non va bene!

no | se $k > \frac{5}{2}$ $\quad \frac{\frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}}{\frac{1}{t^k}} = (\operatorname{sen} t)^2 t^{k-5/2}$ non converge a l

se $k < 5/2$, ad es $k = 2$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}} \cdot t^2 = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{1/2}} = 0$$

$\Longrightarrow$ visto che $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge

e che il $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = 0$

anche $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Avrei potuto raggiungere lo stesso risultato dicendo che $\frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}} \le \frac{1}{t^{5/2}}$ e che $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{5/2}}$ converge.

(4)

$$\int_{0^+}^{a} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}\, dt$$

$t \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t \sim t \Rightarrow (\operatorname{sen} t)^2 \sim t^2$

$f(t) \sim \frac{t^2}{t^{5/2}} = \frac{1}{t^{1/2}}$ scelgo come funzione di confronto $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}}$

$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. Poiché $\int_{0^+}^{a} \frac{1}{t^{1/2}}\, dt$ converge

allora per il criterio del confronto asintotico converge anche $\int_{0^+}^{a} f(t)\,dt$

$\Longrightarrow \int_{0^+}^{a} f(t)\,dt$ e $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ convergono

e quindi converge la loro somma.

Esercizio: testo come il precedente con

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{\sqrt[3]{t^4 - t^5}}$$

$\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\, dt$ converge?

(5)

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t(t+1)(t+2)}}$$

I.D. $t(t+1)(t+2)>0$

$t\in(-2,-1)\cup(0,+\infty)$

su ciascuno di questi 2 intervalli la $f(t)$ è continua e quindi gli intervalli massimali su cui può essere definita una primitiva (ad es. la funz. integrale) sono $(-2,-1)$ oppure $(0,+\infty)$ e bisogna scegliere in base al problema.

Converge : vedi discussione sotto

$$\int_{-2^+}^{-1^-} f(t)\,dt = \int_{-2^+}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{-1^-} f(t)\,dt \qquad a\in(-2,-1)$$

somma di 2 int. impropri

Che cosa succede per $t\to-2^+$?

$$f(-2)\ ?= \frac{1}{\sqrt{(-2)(-2+1)(t+2)}} = g(t)$$

NON POSSO SOSTITUIRE

$$=\frac{1}{\sqrt{2(t+2)}}$$ è la funzione di confronto per $t\to-2^+$

$$\lim_{t\to-2^+}\frac{f(t)}{g(t)}=1 \implies \text{se } \int_{-2^+}^{a}\frac{1}{\sqrt{2(t+2)}}\,dt \text{ converge}$$

anche $\int_{-2^+}^{a} f(t)\,dt$ "

$$\int_{-2^+}^{a}\frac{1}{\sqrt{2(t+2)}}\,dt = \lim_{x\to-2^+}\int_{x}^{a}\frac{dt}{\sqrt{2(t+2)}} = \lim_{x\to-2^+}\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{2(t+2)}\right]_x^a =$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to-2^+}\left(\sqrt{2(a+2)}-\sqrt{2(x+2)}\right)=\sqrt{2}\sqrt{2(a+2)}$$ converge

Che cosa succede per $t\to-1^-$

$$f(-1)\ ?= \frac{1}{\sqrt{(-1)(t+1)(-1+2)}} = \frac{1}{\sqrt{-t-1}} = g(t)$$

$\int_a^{-1^-} g(t)\,dt$ ~~facendo~~ i conti scopro che converge e quindi anche $\int^{-1^-} f(t)\,dt$ converge in quanto $f(t)\sim g(t)$, per $t\to-1^-$

(6)

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t(t+1)(t+2)}}$$. Adesso vediamo che cosa succede in $(0,+\infty)$

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge ?}$$

$$= \int_{0^+}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt \qquad (a>0)$$

$\boxed{\text{per } t\to0^+}$

$$f(0)?= \frac{1}{\sqrt{t\cdot1\cdot2}} = g(t)$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{g(t)}=1$$

$$\int_{0^+}^{a} g(t)\,dt = \lim_{x\to0^+}\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)=\sqrt{2a} \text{ converge}$$

$$\implies \int_{0^+}^{a} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

$\boxed{\text{per } t\to+\infty}$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t\cdot t\cdot t}}=\frac{1}{t^{3/2}}$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}} = \lim_{z\to+\infty}\left[-2t^{-1/2}\right]_a^z = 2a^{-1/2}$$ converge

$$\implies \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge perché per } t\to+\infty$$

$$f(t)\sim g(t)$$

$\implies$ la somma dei due integrali converge.

Derivate successive

Supponiamo che $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a,b)$.
Resta definita una funzione

$$f': (a_1, b_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

che si chiama FUNZIONE DERIVATA di f.
Si possono allora cercare i punti x_1 di (a_1, b_1) in cui la funzione f' è derivabile cioè esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_1+h)-f'(x_1)}{h} = (f')'(x_1).$$

Per semplicità si scrive f'' invece di $(f')'$ e si chiama $f''(x_1)$ derivata seconda di f in x_1.
Se in ogni punto $x_1 \in (a_2, b_2) \subseteq (a_1, b_1)$ la funzione f' è derivabile, resta definita una nuova funzione

$$f'': (a_2, b_2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x_1 \longmapsto f''(x_1)$$

che si chiama funzione derivata seconda di f.

Proseguendo così, a partire dalla funzione derivata n-esima di f

$$f^{(n)}: (a_n, b_n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

si può definire la derivata $(n+1)$-esima in un punto $x_n \in (a_n, b_n)$ come

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x_n+h) - f^{(n)}(x_n)}{h} = f^{(n+1)}(x_n)$$

(se esiste finito).

ESEMPIO: calcolare le derivate successive di x^6.

Approssimazioni locali

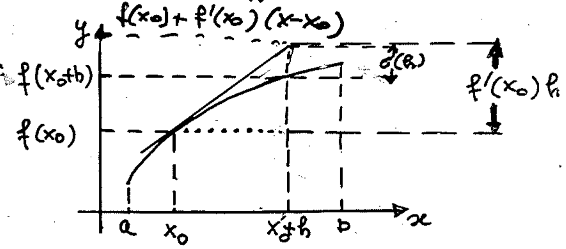
già visto: Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e $x_0+h \in (a,b)$

$$* \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

ove $o(h)$ significa che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

Geometricamente:



... se $h \to 0$ posso sostituire a $f(x_0+h)$ il valore $f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$, ordinata del punto, sulla tangente in $(x_0, f(x_0))$, che ha ascissa x_0

Di solito si indica "l'incremento calcolato lungo la tangente": $hf'(x_0)$ con il simbolo df, differenziale di f in x_0.
Se $f(x)=x$, $f'(x)=1 \Rightarrow dx = h$. Si arriva così alla scrittura

$$df = f'(x_0)dx.$$

Altra cosa già vista:
Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$

e, se $x_0, x_0+h \in [a,b]$, esiste $c \in (a,b)$ t.c. (anzi interno all'intervallo di estremi x_0 e x_0+h)

$$** \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(c) \cdot h$$

*,** Sono due formule di approssimazione "locali" cioè valide in un "piccolo" intorno di x_0.

TEOREMA di TAYLOR. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e

- esista f' in $[a,b]$, continua in $[a,b]$
- " f'' in (a,b)

Allora se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h) \subseteq (a,b)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0) \subseteq (a,b)$]

tale che
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{\frac{1}{2} f''(c) h^2}.$$

Questa formula dice che nella formula
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{o(h)}$$

l' $o(h)$ che "trascuro" ha l'ordine di grandezza di h^2.

In generale

TEOR. di TAYLOR (forma di Lagrange). Considero $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f, f', \dots, f^{(n)}$ siano continue in $[a,b]$
- esista $f^{(n+1)}$ in (a,b).

Sia $x_0 \in (a,b)$ e $x_0+h \in (a,b)$. Allora

se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0)$]

tale che

$$(\blacktriangledown) \quad \boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.}$$

- Si dimostra di passo in passo come visto sopra.
- Come potrebbe venirmi in mente che ci sono quegli "STRANI COEFFICIENTI"?

Proviamoci con un polinomio!

$f(x) = 1+x+x^2+x^3$ in $x_0=0$ vale 1

$f'(x) = 1+2x+3x^2$ " vale 1

$f''(x) = 2+2\cdot 3x$ " vale $2 = 2!$

$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3$ " vale $3!$

I coefficienti dei monomi in $1+x+x^2+x^3$ sono tutti $=$

$\Rightarrow$ per compensare i valori assunti dalle derivate devo dividere $f''(0)$ per $2!$ e $f'''(0)$ per $3!$

Analogamente se il grado del polinomio fosse n e i coefficienti fossero più generali.

DEFINIZIONI

1) la $(\blacktriangledown)$ è detta formula di Taylor (con il resto nella forma di Lagrange) con punto iniziale x_0, arrestata all'ordine n

2) $R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$ è detto resto $(n+1)$-esimo

è la parte importante di $(\blacktriangledown)$: stima quel che trascuro

3) $P_n(x_0,h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

è detto polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di grado n

Se non tutte le derivate sono nulle rappresenta un' approssimazione di $f(x_0+h)$ (quanto buona è chiarito da $R_{n+1}(h)$)

4) Se $x_0=0$ la $(\blacktriangledown)$ diventa

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n}$$

(con $0<c<h$ se $h>0$ o $h<c<0$ se $h<0$)

e si parla di formula di McLaurin.

Calcolare il polinomio di McLaurin di $f(x) = e^x$ arrestato al 5° ordine con il resto nella forma di Lagrange.

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$
0	e^x	1	1
1	e^x	1	1
2	e^x	1	$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$
3	e^x	1	$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$
4	e^x	1	$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$
5	e^x	1	$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$
6	e^x	e^c con $0<c<x$	$\frac{e^c}{720}$

$$f(0+h) = 1 + 1\cdot h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + \frac{1}{120}h^5 + \frac{e^c}{720}\cdot h^6$$

se $h = 1/2$ posso dire

$$e^{1/2} = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3\cdot 2^4} + \frac{1}{24\cdot 16} + \frac{1}{120\cdot 32} + \frac{e^c}{720\cdot 64} \quad \text{con } e^c < 2$$

$0 < c < 1/2$
$1 = e^0 < e^c < e^{1/2} < 2$ poiché $e = (e^{1/2})^2 < 2^2 = 4$

Resto $< \frac{1}{720\cdot 32}$

Se voglio che la precisione sia ALMENO di $\frac{1}{10^2}$?

VEDI PAG 13

Dal teorema di Taylor emerge che approssimando

$f(x_0+h)$ con $P_n(x_0,h)$

ciò che si trascura è $o(h^n)$. Per usi pratici (CALCOLO di LIMITI) conviene ricordare anche questa forma del

TEOREMA di TAYLOR (forma di PEANO). Considero $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Se esistono $f', f'', \dots, f^{(n)}$ in x_0, per ogni $x_0+h \in (a,b)$ si può scrivere

$$(\blacktriangle)\quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Questo è la cosiddetta forma QUALITATIVA del Teor. di Taylor, mentre la precedente è QUANTITATIVA. Perché?

- Torno al calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ Vedi discussione in fondo a p. 13

  Miglioro l'approssimazione trovando la formula di McLaurin di e^x arrestata al II ordine (nella forma di Peano)

  $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ vale 1
  $f'(x) = e^x$ "
  $f''(x) = e^x$ "
  $\Longrightarrow e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

  Visto che $x\to 0$ sostituisco $h = x$ e trovo

  $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Se invece voglio "Calcolare" $e^{1/2}$ usando la sua approssimazione con il polinomio di McLaurin non è sufficiente rappresentare il resto così, perché voglio sapere se trascuro una parte troppo grande. So che $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{e^c}{3!}h^3$, $0<c<\frac{1}{2}$: posto $h = \frac{1}{2}$, $\frac{e^c}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$: TROPPO?

Se arresto al 3° ordine

$$f(h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{e^c}{24}\cdot h^4$$

se $h = \frac{1}{2}$ Resto: $\frac{e^c}{24 \cdot 12}$; $1 < e^c < 2$ poiché $0 < c < \frac{1}{2}$

Resto $< \frac{1}{144}$

$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}$ con resto inferiore a $1/100$.

Se arresto al 2° ordine

$$f(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{e^c}{6}h^3$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{e^c}{48}$$

con $e^c > 1$
resto $\frac{e^c}{48} > \frac{1}{48}$
non basta
per la precisione
a $1/100$

(Dettagli sulla pag 14.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + o(x)) - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} \quad ??$$

Invece

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Due modi di presentare il problema quantitativo

- Un modo è quello appena visto: se approssimo $e^{1/2}$ con $1 + 1/2 + 1/2 \cdot (1/2)^2 = 13/8$ commetto un errore sicuramente $< \frac{1}{24}$ ma altrettanto sicuramente $> \frac{1}{48}$ poiché $c > 0$ implica $R_3 = \frac{e^c}{48} > \frac{e^0}{48} = \frac{1}{48}$.

- Secondo modo: voglio migliorare questa approssimazione in modo che l'errore che commetto sia sicuramente $< 1/100$.

La formula di McLaurin (nella forma di Lagrange) arrestata all'ordine n è

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}h^{n+1}$$

ove, se $h = 1/2$, si ha $0 < c < 1/2$ ($\Rightarrow$ posso sempre pensare $e^c < 2$)

Devo trovare n in modo che

$$R_{n+1}(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{sia } < \frac{1}{100}$$

Vado per tentativi:

$n = 2$ non va bene

$n = 3$? $R_4(1/2) = \frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{16} < \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{8} < \frac{1}{100}$: $n=3$ va bene.

Cioè se scrivo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}$ al posto di $e^{1/2}$ commetto un errore più piccolo di $\frac{1}{100}$ (ma $> \frac{1}{284}$) ....

Polinomio di Taylor di un polinomio $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = A(x)$

Esistono tutte le possibili derivate. Notare in particolare che $A^{(n)}(x) = n!\,a_n$ e $A^{(n+1)} = 0$ $\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A(x) = A(x_0) + A'(x_0)(x - x_0) + \underline{A''(x_0)}(x - x_0)^2 + \dots + \underline{n!\,a_n}(x - x_0)^n + 0(x - x_0)^{n+1}$$