Correzione esercizio compito

$f(x) = 2x - \sqrt{x^2-5x}$

$\lim_{x\to-\infty}$ e eventuale asintoto

$$\lim_{x\to-\infty} 2x - \sqrt{x^2-5x} = -\infty - (\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-|x|}{x} \underset{x<0}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to-\infty} -x - \sqrt{x^2-5x} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2-5x}\right) =$$

non posso approssimare $\sqrt{x^2-5x} = |x| = -x$

perché mi darebbe $x - (x) = 0$, ma

$\sqrt{x^2-5x} = |x| + o(x)$: ma $o(x)$?

$$= -\lim_{x\to-\infty} \left(x - x\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \cdot \left(\sqrt{1-\frac{5}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \cancel{x} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-5}{\cancel{x}}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$\sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-5}{x}\right)$$

$y = 3x - 5/2$: equaz. dell'asintoto

Formule di MacLaurin ($x_0 = 0$) di alcune funz. elementari (che saranno tutte continue con derivate successive continue in $[a,b] \ni 0$ internamente):

$$f(0+h) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Resto nella forma di PEANO oppure

$$\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Resto nella forma di LAGRANGE, ove c è un opportuno punto compreso tra 0 e h (o tra h e 0 se $h<0$)

oppure posso riscrivere

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ funzione dispari $\longrightarrow$ solo potenze dispari

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$\operatorname{sen} x$	0	0
1	$\cos x$	1	1
2	$-\operatorname{sen} x$	0	0
3	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
4	$\operatorname{sen} x$	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮

$n = 2k+1$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k})$$

Resto nella f. di Lagrange: $(-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sen} c}{(2k+2)!} x^{2k+2}$

Cerco un'approssimazione di $\operatorname{sen}\frac{1}{10}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\operatorname{sen} c}{6!}x^6 \quad \text{ove}$$

$$c \in \left(0, 1/10\right]$$

poiché $|\operatorname{sen} c| < 1$ questo resto, in valore assoluto è $\ll \frac{1}{10^8}$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^5} - \frac{\operatorname{sen} c}{720}\cdot\frac{1}{10^6}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000} + \boxed{\frac{\operatorname{sen} c}{24}\cdot\frac{1}{10.000}}$$

Se mi fermo ai primi due addendi, cioè approssimo $\sin(0{,}1) = 0{,}10017$ l'errore dato dal resto è - similmente - $< \frac{1}{240.000}$

non sempre l'approssimazione polinomiale "riesce"!

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

MOSTRO!

è continua perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

è anche derivabile nell'origine poiché

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm}\frac{e^{-1/h^2}}{h} \underset{\frac{1}{h}=t}{=} \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0$$

$$f''(0) = f^{IV}(0) = \ldots = 0$$

la formula di Maclaurin arrestata all'ordine n è

$$f(h) = 0 + 0\cdot h + 0\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots + 0\cdot\frac{h^n}{n!} + o(h^n) = o(h^n)$$

NON POSSO USARLA PER CALCOLARE LIMITI O STIMARE $f(x)$.

$\tan x$? : funzione dispari → solo potenze dispari

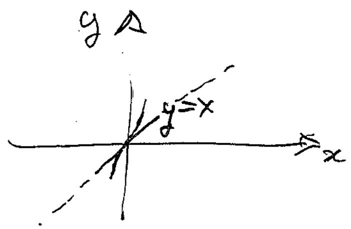
n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$
0	$\tan x$	0
1	$1+(\tan x)^2$	1
2	$2(\tan x)\cdot(1+\tan^2 x)$	0
3	$2\left[1+\tan^2 x + 3(1+\tan^2 x)\tan^2 x\right]$ $= 2\left[1+4\tan^2 x + 3\tan^4 x\right]$	2
4	$= 2\left(8\tan x(1+tg^2 x) + 12\tan^3 x(1+\tan^2 x)\right)$	0
5	$16(1+\tan^2 x + \ldots)$	16

$$\tan x = 0 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{o più in dettaglio:}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{120}x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

ecc.



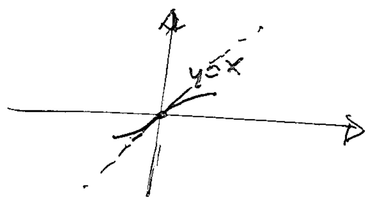
rispetto a $y=x$, se $x>0$ vado via via ad aggiungere dei termini $\Rightarrow$ resto sopra la tangente in $(0,0)$

$f(h) = \arctan h$ funzione dispari → solo potenze dispari

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$
0	$\arctan h$	0
1	$\frac{1}{1+h^2}$	1
2	$-2\,\frac{h}{(1+h^2)^2}$	0
3	$-2\,\frac{(1+h^2)^{\cancel{2}} - h\cdot 2\cancel{(1+h^2)}\cdot 2h}{(1+h^2)^{\cancel{4}\,3}} = -2\,\frac{1+h^2-4h^2}{(1+h^2)^3} = -2\,\frac{1-3h^2}{(1+h^2)^3}$	-2
4		0
5		$4!$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$



togliendo (e aggiungendo, ma sempre meno di quanto ho tolto) garantisco che per $x>0$ sto sotto la retta tang. in $(0,0)$ a $\arctan x$.

$f(x) = \ln(1+x)$ (attenzione: in $x=0$ e in un suo intorno deve essere definita, continua e con tutte le derivate " è ". Per questo NON LN(X).)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1}=1$	1
2	$\frac{-1}{(1+x)^2}$	$\frac{-1}{1}=-1$	$-\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{(1+x)^3}$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
4	$\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$	$\frac{-6}{1}=-6$	$\frac{-6}{24}=-\frac{1}{4}$
n	$\frac{(-1)^{n-1}\,2\cdot 3\cdots(n-1)}{(1+x)^n}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$f(x)=(1+x)^a \qquad a\in\mathbb{R} \qquad x>-1$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x)^a$	1
1	$a(1+x)^{a-1}$	a
2	$a(a-1)(1+x)^{a-2}$	$a(a-1)$
3	$a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$	$a(a-1)(a-2)$
4		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$
n	$a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$	$a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\binom{a}{n} \qquad +\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$a=\frac{1}{2}$: $\quad \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

ecc.

Caso non polinomiale.

Calcoliamo i <u>polinomi di MacLaurin</u> di alcune funz. elementari, col resto nella forma di Peano (utili nel calcolo di $\boxed{\lim_{x\to0}}$).

$\boxed{f(x)=\operatorname{sen}x}$

$f^{(2k)}(x)=\pm\operatorname{sen}x \quad \Rightarrow f^{(2k)}(0)=0$

$f^{(1+4k)}(x)=\cos x \quad \Rightarrow f^{(1+4k)}(0)=1$

$f^{(3+4k)}(x)=-\cos x \quad \Rightarrow f^{(3+4k)}(0)=-1$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

Similmente:

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^8)}$$

poiché $\quad D(\operatorname{tg}x)=\frac{1}{\cos^2x}$, $\quad D^2(\operatorname{tg}x)=\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3x}$

$D^3(\operatorname{tg}x)=2\frac{\cos^2x+3\operatorname{sen}^2x}{\cos^4x}$ etc. o (meglio) $D(\operatorname{tg}x)=1+\operatorname{tg}^2x$ ecc.

Ancora:

$$\operatorname{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\to e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\operatorname{Sh}x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Ch}x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n})$$

$$\operatorname{Th}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$$

$$\to \log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

Fare le verifiche, ricordando che il punto iniziale è $x_0=0$.

Applicazioni. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x) + 2e^{-x} - 2\sqrt{1+x^2}}{x^3} \quad : \quad \frac{0+2-2}{0} \quad \to \text{F.I.} \left[\frac{0}{0}\right]$$

provo ad usare approssimazioni "lineari"

$\arctan 2x = 2x + o(x)$ per $x \to 0$

$e^{-x} - 1 = -x + o(x)$; $e^{-x} = 1 - x + o(x)$

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Numer.: $\cancel{2x} + o(x) + 2 - \cancel{2x} + o(x) - 2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$

$$2 + o(x) - 2 - x^2 - o(x^2) =$$

$$= o(x) - x^2 - o(x^2) = o(x)$$

Devo approssimare meglio!

$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$ $\boxed{\text{se } t \to 0}$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)$

$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$

$\boxed{t = 2x}$ $\arctan 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} + o(x^5)$

$= 2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + o(x^5)$

$\boxed{t = -x}$ $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)$

Allora

$$\frac{\arctan 2x + 2e^{-x} - 2\sqrt{1+x^2}}{x^3} =$$

$$\frac{1}{x^3}\left(\cancel{2x} - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) + 2\left(\cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + -2\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-3x^3 + o(x^3) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-3x^3 + o(x^3)\right) = -3 + o(1)$$

per $x \to 0$ il limite è -3

NUOVO ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + 5x^4}{(4\,\text{sen}\,2x + x^3)^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$. Approssimo:

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$\text{sen}\,2x = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3)$; basterebbe $\text{sen}\,2x = 2x + o(x)$ poiché vado a confrontare con una potenza prima

$4\,\text{sen}\,2x = 8x - \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)$

Denom: $8x - \frac{13}{3}x^3 + o(x^3) = 8x + o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\text{sen}\,2x+x^3)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-\cancel{1}-\cancel{x^2}+5x^4}{(8x+o(x))^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{11/2\, x^4+o(x^4)}{512\cdot x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{11}{1024}\cdot x = 0$$

$\boxed{\text{NUOVO ESERCIZIO con quadrato di una FORM DI TAYLOR!}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[(\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)^2 - x^2+\frac{2}{3}x^4\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[\cancel{x^2-\frac{2x^4}{3}}+\frac{2x^6}{5}+2x\,o(x^5)+\frac{x^6}{9}-\frac{2}{15}x^8-\frac{2x^3}{3}o(x^5)+\right.$$
$$\left.+\frac{x^{10}}{25}+\frac{2}{5}x^5 o(x^5)+(o(x^5))^2\cancel{-x^2+\frac{2}{3}x^4}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{9}\right)x^6+o(x^6)\right]$$

poiché $x^8=o(x^6)$, $x^{10}=o(x^6)$
$x^3 o(x^5) = o(x^8) = o(x^6)$
$x^5 o(x^5) = o(x^{10}) = o(x^6)$
$(o(x^5))^2 = o(x^6)$

$$= \frac{2}{5}+\frac{1}{9}$$

Se mi fossi fermato a $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ avrei trovato al numeratore;

$$\cancel{x^2}-\frac{\cancel{2x^4}}{3}+o(x^4)+\frac{x^6}{9}+o(x^6)+(o(x^3))^2-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{2}{3}x^4} = o(x^4)$$

poiché $\frac{x^6}{9}=o(x^4)$

Esercizi. Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\text{sen}\,x^2}{(1-\cos x^2)^2}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{3x^2}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\text{arctg}^2 x - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$

Determinare il polinomio di Taylor di $\ln x$ di 3° grado con punto iniziale $x_0 = 2$

Usando la formula di McLaurin con il resto nella forma di Lagrange valutare $\text{sen}\,1/3$ in modo che l'errore commesso sia $< 1/10^3$.