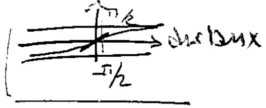
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[(\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$



$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\frac{23}{45}x^6 + o(x^6)\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^6 + \boxed{2x\,o(x^5)} +$$

$$+ \frac{x^6}{9} - \frac{2}{15}x^8 - \boxed{\frac{2}{3}x^3 o(x^5)} +$$

$$+ \frac{x^{10}}{25} + \boxed{\frac{2}{5}x^5 o(x^5)} + (o(x^5))^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 + o(x^6) - \frac{2}{15}x^8 + o(x^8) +$$

$$+ \frac{x^{10}}{25} + o(x^{10})$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 + o(x^6)$$

per $x \to 0$: $x^8 = o(x^6)$ poiché $\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^6} = 0$

$x^{10} = o(x^6)$ poiché $\lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x^6} = 0$

$o(x^8) = o(x^6)$

$\Downarrow$

$f(x)$

se $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^8} = 0$

anche $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^8}\cdot x^2 = 0$

$o(x^{10}) = o(x^6)$

RIPRESA DELL'ULTIMO ES. DELLA VOLTA SCORSA!

Attenzione a quale è l'intorno in cui ci si muove. Adesso.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\operatorname{sen}(4x-x^2)} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{(4-x)x} =$$

$$\boxed{\text{per } x\to 4 \quad \operatorname{sen}(4x-x^2) \sim 4x-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x+1}{-x} = -\frac{5}{4}$$

Si risolveva semplicemente così. Ma si voglio usare Taylor.

$x \to 4$

$$\operatorname{sen}(4x-x^2) = 0 + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-4)^n + o\left((x-4)^n\right)$$

$x - 4 = t \qquad x_0 = 4$

$x = t + 4 \qquad t_0 = 0$

$$-\operatorname{sen} t(t+4) = 0 + \left[-\cos(t(t+4))\cdot(2t+4)\right]_{t=0}\cdot t + o(t)$$

$$-4t + o(t)$$

$$= -4(x-4) + o(x-4)$$

$$= 4(4-x) + o(x-4) \quad \text{ecc.}$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 10$$

rappresentarlo come polinomio nelle potenze di $x-1$

$$f(x) = P(x-1) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 \ ??$$

Chi sono a_0, a_1, a_2, a_3 ?

Formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = 1$ arrestato ... quando serve

n	$f^{(n)}$	$f^{n}(1)$	$f^{n}(1)/n!$
0	x^3+x^2-x+10	11	11
1	$3x^2+2x-1$	4	4
2	$6x+2$	8	$8/2=4$
3	6	6	$6/6=1$
4	0	0	0

$$f(x) = 11 + 4(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3 + 0$$

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$

$f, f', f'', \dots f^{(n)}$, esistono in x_0

Allora posso scrivere

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Suppongo di sapere che $f'(x_0)=0$

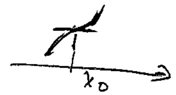
La formula di Taylor mi aiuta a decidere se in x_0 c'è un min/MAX relativo o un flesso...

Se tutte le derivate fino a $f^{(n-1)}(x_0)$ sono nulle e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ posso dire che:

1) se n è dispari: x_0 è un punto di flesso
2) se n è pari
   - $f^{(n)}(x_0) > 0$: MINIMO REL.
   - $f^{(n)}(x_0) < 0$: MASSIMO REL.

Dim. $$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

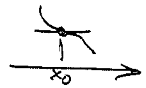
1) n dispari: $h>0 \Rightarrow h^n>0$
   $h<0 \Rightarrow h^n<0$



Quindi se $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ è >0

si ha $f(x_0+h) > f(x_0)$ se $h>0$
$f(x_0+h) < f(x_0)$ se $h<0$

[e viceversa se $a_n < 0$.



]

2) n pari $\quad h^n > 0 \quad \forall h \neq 0$

$f(x_0+h) - f(x_0)$ ha lo stesso segno a destra e a sinistra di x_0

se $a_n > 0$ anche $a_n h^n > 0 \Rightarrow$
$f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \quad \forall h \neq 0$
$\Rightarrow x_0$ è un punto di min rel.

se $a_n < 0$ ho $a_n h^n < 0 \Rightarrow$
$f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \quad \forall h \neq 0$
$\Rightarrow x_0$ è un punto di MAX rel.

In particolare se $f''(x_0) \neq 0$

se $f''(x_0) > 0$ ho min. rel. (e funz. convessa)
" $f''(x_0) < 0$ " MAX " (" concava)

Funzioni di PIÙ VARIABILI

Si hanno ogni volta che l'ESITO (dato in uscita) dipende non da 1 solo ma da 2 o PIÙ DATI DI INGRESSO

Es. 1 $\quad V = k \dfrac{T}{P}$ $\quad$ (k costante >0) : il volume di un gas perfetto dipende da temperatura e pressione

Es. 2 $\quad \mathcal{A} = b \cdot h$ $\quad$: l'area di un rettangolo dipende dalla sua base e dalla sua altezza.

PER ORA CONSIDERIAMO SOLO FUNZIONI DI DUE VARIABILI.

È essenziale, per sviluppare successivamente la teoria, ORDINARE IN MODO UNIVOCO I DATI IN INGRESSO, cioè decidere che una certa variabile è da considerare come la PRIMA, un'altra come SECONDA ecc. Ciò non comporta un giudizio di importanza!

Ad es. nel caso del gas perfetto posso pensare T come 1ª variabile e P come 2ª e allora scriverò

$$V = V(T, P)$$

o viceversa e allora scriverò $\quad V = V(P, T)$. L'importante è che si resti fedeli alle scelte fatte.

Questa osservazione mette in luce che

l'insieme di definizione di una funzione di 2 variabili è un insieme di coppie ordinate di numeri reali, cioè un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$.

(similmente se le variabili sono $n (\geq 2)$, l'insieme di definizione della funzione è un s.i. E di $\mathbb{R}^n$)

Invece l'IMMAGINE di queste funzioni sarà ancora $\subseteq \mathbb{R}$.

FORMALMENTE:

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione reale di due variabili reali con insieme di definizione E

$$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una corrispondenza che a OGNI $(x,y) \in E$ associa UNO E UN SOL NUMERO REALE $z = f(x,y)$

GRAFICO : in $Oxyz$ si considera $\{(x, y, f(x,y)) \;,\; (x,y) \in E\}$

Nei casi più comuni è una superficie che rappresenteremo più semplicemente scrivendo : $\quad z = f(x,y)$.

Es1 $\quad z = x^2+y^2 \quad$: definita su tutto $\mathbb{R}^2$, a valori in $[0, +\infty)$

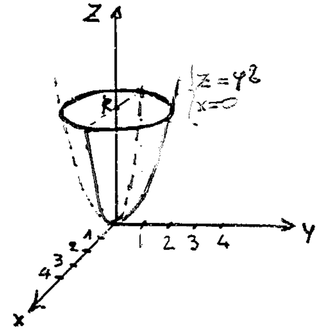
Per "vedere" il grafico osservo che

1) sezioni con piani $z = k \quad (k \geq 0)$ danno luogo alle circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=k \\ z = k \end{cases}$

2) sezioni con i due piani coordinati $x=0$ e $y=0$ danno luogo rispettivamente alle parabole

$$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

... PARABOLOIDE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z.

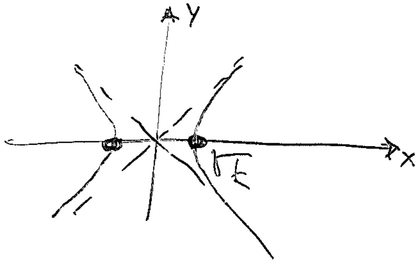


Es. 2 $\quad z = x^2 - y^2 \quad$: definita su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{R}$.

Operando come sopra: PARABOLOIDE A SELLA

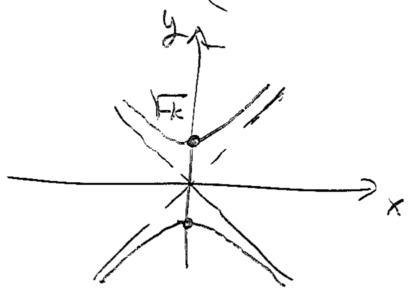
$$\begin{cases} z=k \\ x^2-y^2=k \end{cases}$$

se $k>0$ $\begin{cases} z=k \\ y=0 \\ x^2-y^2=k \end{cases}$ ha soluzioni $\begin{cases} z=k \\ y=0 \\ x=\pm\sqrt{k} \end{cases}$



$$\frac{x^2}{(\sqrt{k})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{k})^2}=1$$

se $k<0$ $\begin{cases} z=k \\ -x^2+y^2=-k \\ x=0 \end{cases}$ ha soluzioni $\begin{cases} z=k \\ y=\pm\sqrt{-k} \\ x=0 \end{cases}$



Dominio!

!!! Togliere!

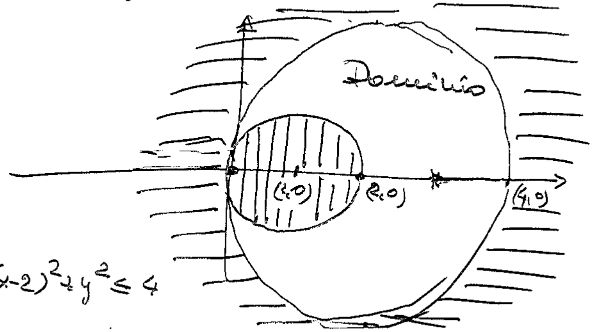
$$(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)\geq 0$$

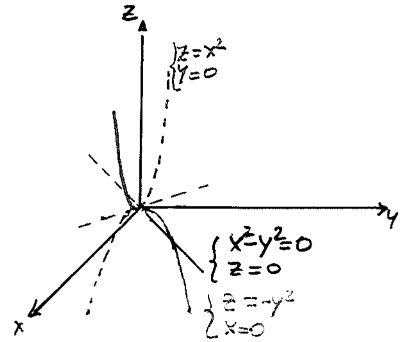
$x^2+y^2-2x\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+y^2\geq 1$

$4x-x^2-y^2\geq 0 \Leftrightarrow$

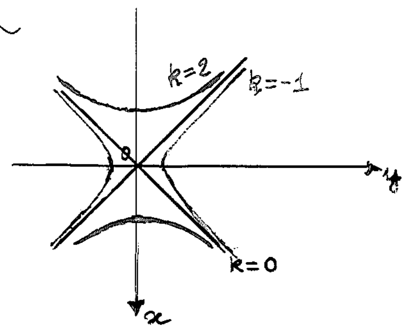
$x^2+y^2-4x\leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\leq 4$





Non è facile leggere il grafico: conviene ad es. rappresentare la proiezione sul piano xOy delle curve che si ottengono per sezione con piani $\perp$ asse z, della forma $z=k$

Si vede che per $k>0$ le curve sono tutte disposte come l'iperbole rossa mentre per $k<0$ sono disposte come l'iperbole verde e quindi in $(0,0)$ si viene a creare un'insellatura (... dov'è l'arcione? ... e le staffe?)



ES.3 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$: definita purché $1-x^2-y^2\geq 0$.

Quindi $E=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}$: cerchio di raggio 1

i valori assunti sono contenuti in $[0,1]$

Si ha $f(x,y)=0$ sul bordo (= circonferenza) di E

$f(x,y)=1$ in $(0,0)\Rightarrow$

$(0,0)$: punto di massimo per la funzione

punti della circonferenza invece sono punti di minimo

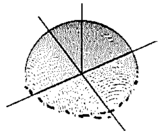
Il GRAFICO è una SEMISFERA.

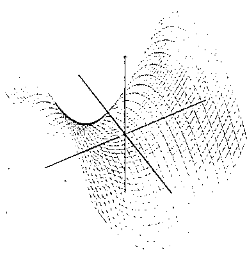
ES. 4 $z=\sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$: definita purché $(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)\geq 0$ cioè nei punti compresi tra le 2 circonferenze $(x-1)^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=4$

Sulle 2 circonferenze vale 0. Altrove >0. Ha UN MAX.?

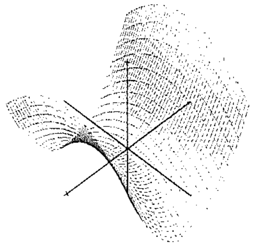
Funzioni di due variabili

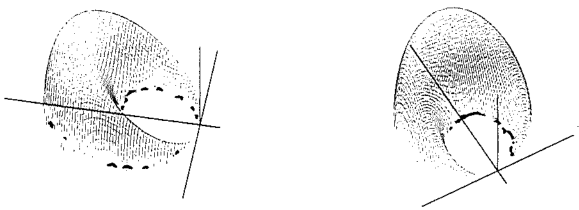
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$





$f(x,y) = x^2 - y^2$





$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$

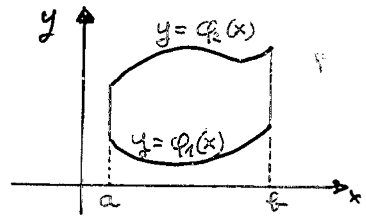
Cerchiamo di generalizzare la teoria vista in 1 variabile.

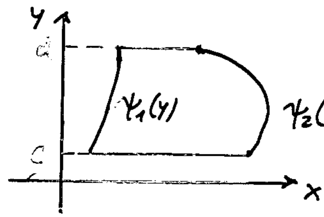
Anzitutto: come con funzioni di 1 variabile abbiamo ristretto l'attenzione a funzioni definite su intervalli (o loro unioni) qui la restringiamo a funzioni definite su "domini semplici" (o loro unioni finite) intendendo per <u>dominio semplice</u> un s.i. E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b \ \text{ e } \ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x) \text{ con } \varphi_1,\varphi_2 \text{ continue in } (a,b)\}$$

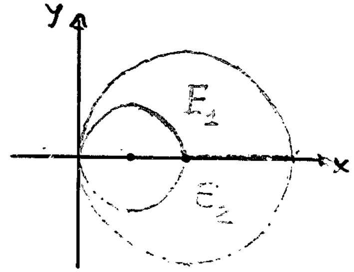
oppure

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c<y<d \ \text{ e } \ \psi_1(y)<x<\psi_2(y) \text{ con } \psi_1,\psi_2 \text{ continue in } (c,d)\}$$





Nel caso dell'ultimo esempio.



l'insieme di definiz. è unione di due domini semplici E_1 ed E_2 del 1° tipo

Si dice che $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se e solo se

PER OGNI $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ esiste $\delta=\delta(\varepsilon)$ $(\delta\in\mathbb{R}, \delta>0)$ tale che

se $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ allora $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

Il concetto di limite è indipendente dal modo con cui il punto (x,y) si avvicina ad (a,b). In particolare il limite se esiste è unico.

$$E_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid 0<x<4 ,\ 1+\sqrt{1-x^2} < y < 2+\sqrt{2-x^2} \}$$

Infatti:

$x^2+y^2-2y=0$ devo rappresentarla come y funzione di x:

$$y^2-2y+x^2=0 \implies y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

+ semicirc. sup.

− semicirc. inf.

$$x^2+y^2-4y=0 \implies y^2-4y+x^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 \pm \sqrt{2-x^2}$$

+ sup

− inf

$$E_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid 0<x<4 ,\ 1-\sqrt{1-x^2} < y < 2-\sqrt{2-x^2} \}$$

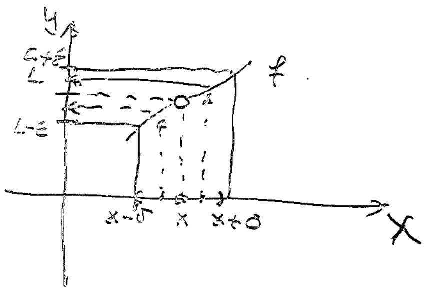
Commento alla definizione di limite

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$

t.c. $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

risulti $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

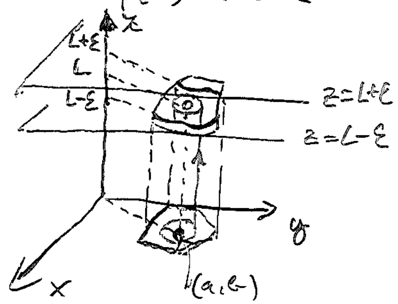
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$

tale che se

$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$

allora

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$



ES. 5 $\quad f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y)\to(0,0)$ tende a 1.

Infatti se ~~passo~~ in coordinate polari $(x=\rho\cos\theta, y=\rho\operatorname{sen}\theta)$ la funzione si riscrive $\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}$ ed è noto che

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} = 1$$

... o, se si preferisce, fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta=\delta(\varepsilon)$ t.c. se $\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ si ha $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}-1\right| < \varepsilon$

ES. 6 $\quad f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non esiste</u>. Vedi pag. succ.

Per convincercene studiamo $f(x,y)$:

1) assume gli stessi valori in (x,y) e in $(-x,-y)$
2) " valori opposti in (x,y) e in $(-x,y)$ (o $(x,-y)$)

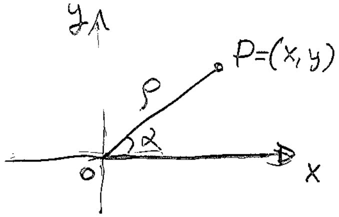
Quindi ci limitiamo a considerare

$$E = \{ (x,y),\ x\geq 0, y\geq 0 \ \text{ con } (x,y)\neq(0,0) \}$$

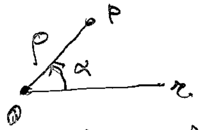
3) $2xy \leq x^2+y^2$ in $E \implies 0 \leq f(x,y) \leq 1$ in E
   e $f(x,y)=0$ sui semiassi delle x e delle y positive
   $f(x,y)=1$ se $x=y$

Già questo basta a dire che il limite proposto non esiste: infatti se mi muovo verso $(0,0)$ lungo la direzione degli assi, essendo $f(x,0)=f(0,y)=0$ trovo come CANDIDATO LIMITE: 0 ;
se invece mi muovo lungo $y=x$ essendo $f(x,x)=1$ trovo come CANDIDATO LIMITE: 1 . Sono diversi:
IL LIMITE non c'è.

VERIFICARE CHE $\forall k \in [0,1]$ c'è una coppia di semirette (simmetriche rispetto a $y=x$) del 1° quadrante sulle quali $f(x,y)=k$.



$x = \rho \cos\alpha$
$y = \rho \operatorname{sen}\alpha$



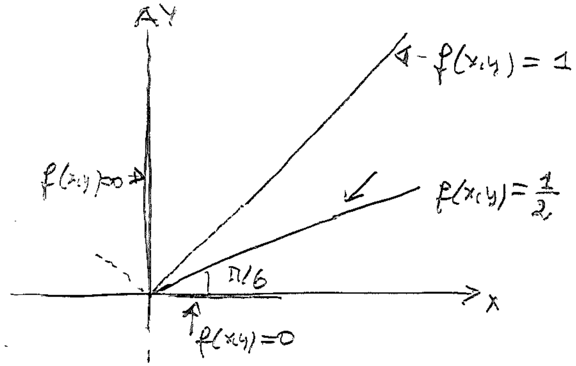
$\rho \in (0,+\infty)$
$\alpha \in [-\pi,\pi]$

Coordinate polari

$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \alpha$ ..... t.c. $\cos\alpha = \frac{x}{\rho}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}$ e $-\pi < \alpha \le \pi$.

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\cancel{\rho^2}\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\rho^2}} = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$$



a seconda della retta con cui si arriva in $(0,0)$ la funzione in prossimità di $(0,0)$ ha valori diversi compresi tra -1 e 1. Quindi non posso rendere $|L - f(x,y)|$ piccolo quanto voglio.