$f(x,y)$ è detta continua in (a,b) se $f(x,y)$ è

- definita in (a,b) e in un suo intorno $U=\{(x,y): \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\rho\}$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Esempi di funzioni continue: 1, 2, 3, 4 ; 5 se completo la def. ponendo $f(0,0)=1$; 8 se completo la def. ponendo $f(0,0)=0$.

Per le funzioni continue in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ valgono teoremi analoghi a quelli delle funz. di 1 variabile.
In particolare:

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua su un sottoinsieme chiuso e limitato di E (ad esempio su un disco, circonferenza compresa). Allora

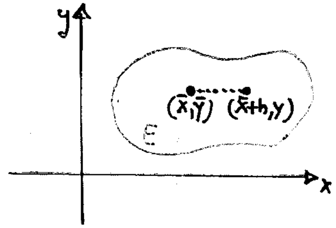
- l'immagine mediante f di tale s.i. limitato è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$
- esistono punti del s.i. chiuso e limitato di E in cui f assume valore massimo e valore minimo

L'esempio 1 e l'esempio 3 (se tolgo la circonferenza da E) mostrano che l'ipotesi che E (o un suo sottoinsieme) sia limitato e sia chiuso sono entrambe necessarie.

Dagli esempi è chiaro che la continuità in dimensione >1 è cosa delicata. A maggior ragione lo sarà l'approssimazione lineare che vogliamo fare per studiare min. e MAX relativi.

DERIVATE PARZIALI

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in E. Siano $(\bar{x},\bar{y}) \in E$; $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo in valore assoluto perché $(\bar{x}+h,\bar{y}) \in E$.



Se esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y})-f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

dirò che esso è la derivata parziale di f rispetto a x nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e la denoterò con

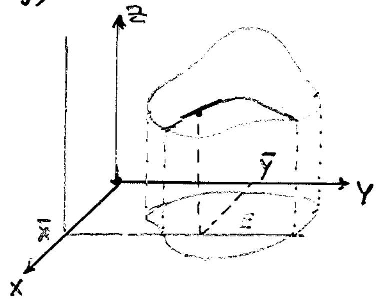
$$f_x(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{o} \quad D_x f(\bar{x},\bar{y})$$

È come tenere fisso y in $f(x,y)$ e pensare f come funzione della sola x.
Analogamente se $k \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto perché $(\bar{x},\bar{y}+k) \in E$ ed esiste finito

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(\bar{x},\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})}{k} := f_y(x,y)$$

dico che il limite è la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x},\bar{y})$.

Ovviamente la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x},\bar{y})$ è il coeff. angolare della retta tangente in $(\bar{x},\bar{y})$ alla curva sezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $x=\bar{x}$ (similmente $f_x(\bar{x},\bar{y})$)



Quindi $f_y(x,y)$ misura la velocità di variazione della quota $z=f(x,y)$ quando (x,y) si muove nella direzione dell'asse y ....

Esempio:

$$f(x,y) = 2x^2y - 5xy^2 + y^3 - 2xy + x - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy - 5y^2 + 0 - 2y + 1 - 0 =$$

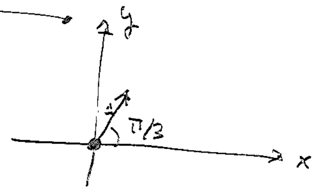
$$= 4xy - 5y^2 - 2y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 \cdot 1 - 5x \cdot 2y + 3y^2 - 2x + 0 - 0 =$$

$$= 2x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x$$

Esempio:

$$f(x,y) = xy$$



Calcolare la sua derivata nella direzione del versore $\ell = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e nel punto $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+\frac{1}{2}h, 0+\frac{\sqrt{3}}{2}h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{1}{2}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}h - 0}{h} = 0$$

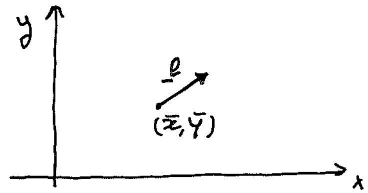
Nel punto $(1,0)$ invece

$$\frac{\partial f}{\partial(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}(1,0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+\frac{1}{2}h; 0+\frac{\sqrt{3}}{2}h) - f(1,0)}{h} =$$

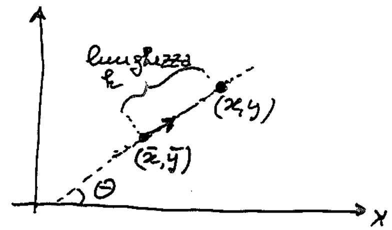
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\left(1+\frac{1}{2}h\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}h - 0\right) = \sqrt{3}/2$$

Se volessi la velocità di variazione della quota muovendosi in una direzione diversa da quella degli assi dovrei:

1) indicare un versore della direzione: $\ell = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



2) individuare il punto variato attraverso questo versore



$$\begin{cases} x - \bar{x} = h\cos\theta \\ y - \bar{y} = h\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + h\cos\theta \\ y = \bar{y} + h\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3) calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(\bar{x}+h\cos\theta, \bar{y}+h\operatorname{sen}\theta) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

Se esiste finito questo limite sarà detto derivata di f in direzione $\underline{\ell}$ nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e denotato con $\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$

In ipotesi opportune questa definizione può essere semplificata (vedi pag. successiva)

1^a oss. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ sono definite entrambe le derivate parziali, è definito un vettore che ha tali derivate come componenti. Esso sarà detto GRADIENTE di f in (x,y):

$$\operatorname{grad} f\,(\bar{x},\bar{y}) = \left(f_x(\bar{x},\bar{y}),\ f_y(\bar{x},\bar{y})\right)$$

Es

$$f(x,y) = (x+y)e^{xy}$$

$$f_x(x,y) = e^{xy} + (x+y)\left(y e^{xy}\right) = e^{xy}\left(1+xy+y^2\right)$$

$$f_y(x,y) = e^{xy}\left(1+xy+x^2\right)$$

$$\operatorname{grad} f\,(x,y) = e^{xy}\left(1+xy+y^2,\ 1+xy+x^2\right)$$

Esso vale $(1,1)$ nell'origine e in generale $(1, 1+x^2)$ in $(x,0)$.

2^a oss. Supponiamo che in ogni (x,y) interno a E esistano le derivate f_x, f_y e siano funzioni CONTINUE in E.
Sia $\underline{\ell} = \underline{\ell}(x,y)$ un versore definito in (x,y).

La derivata di f nella direzione di $\underline{\ell}$ nel punto (x,y) è il prodotto scalare

$$\underbrace{(\operatorname{grad} f)\cdot \underline{\ell}}_{= f_x(x,y)\cdot\cos\theta + f_y(x,y)\cdot \operatorname{sen}\theta} := \frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(x,y) \qquad \text{se } \underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{j}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

NOTA Questo non è proprio la definizione di derivata direzionale ... ma le è equivalente nelle ipotesi fatte.
In generale se $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ la der. in direzione $\underline{\ell}$ di f in $(\bar{x},\bar{y})$

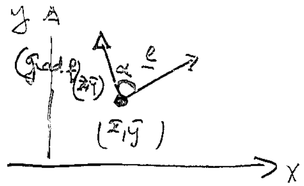
E: $$\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\bar{x}+h\cos\theta, \bar{y}+h\operatorname{sen}\theta) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

La derivata di f nella direzione $\underline{\ell}$ in $(\bar{x},\bar{y})$ misura la velocità di variazione della quota muovendosi da $(\bar{x},\bar{y})$ nella direzione del versore $\underline{\ell}$
Detto α l'angolo tra grad f e $\underline{\ell}$ (nel punto $(\bar{x},\bar{y})$) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}} = \operatorname{grad} f\cdot \underline{\ell} = |\operatorname{grad} f|\cos\alpha$$

ed è quindi massima se grad f e $\underline{\ell}$ hanno ugual direzione e verso, minima se la direzione è = ma il verso opposto e nulla se sono ortogonali.
Dunque grad f calcolato in (x,y) dà la direzione di massima pendenza del grafico in (x,y); un versore ad esso ortogonale individua la direzione in cui non c'è variazione di pendenza ($\Rightarrow$ curva di livello ... cammino in quota)
Leggere una carta geografica in quest'ottica.

(VEDI FIGURA A PAG SEGUENTE)



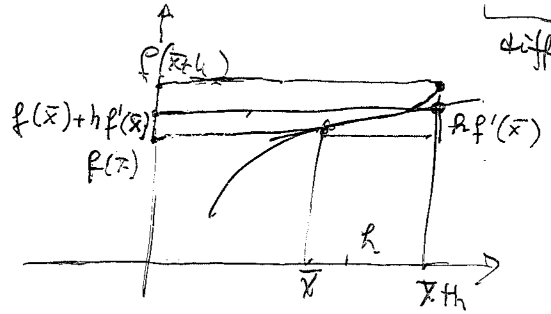
il gradiente è ⊥ alle curve di livello

curve di livello (sui punti di ogni curva il valore di $f(x,y)$ è costante)

Se funzione $f(x)$ è derivabile in $\bar{x}$ è possibile dire che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - h f'(\bar{x})}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \underbrace{h f'(\bar{x})}_{\text{differenziale}} + o(h)$$



$y = f(\bar{x}) + (x-\bar{x}) f'(\bar{x})$
eq. della retta tangente in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ al grafico di $f(x)$

Significato del differenziale in dimensione 1

~~[illegible]~~ Se – come abbiamo supposto parlando di gradiente – le derivate parziali f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ si riesce a ricavare un risultato più forte della continuità di $f(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$. Precisamente

> Se f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora
> $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) - h f_x(\bar{x},\bar{y}) - k f_y(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$
> cioè la funzione $f(x,y)$ è <u>differenziabile in</u> $(\bar{x},\bar{y})$

(e in tal caso è continua in $(\bar{x},\bar{y})$ poiché

$(\bullet)$ $f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + h f_x(\bar{x},\bar{y}) + k f_y(\bar{x},\bar{y}) + o(\sqrt{h^2+k^2}) \ldots$)

Differenziabilità significa che in $(\bar{x},\bar{y})$ la funzione $f(x,y)$ può essere approssimata con un polinomio di 1° grado in x,y o – come si suol dire – può essere LINEARIZZATA.

Graficamente ciò significa che il grafico della funzione in prossimità di $(\bar{x},\bar{y})$ può essere approssimato con un piano "tangente" in $(\bar{x},\bar{y})$ al grafico. Tale piano ha equazione (vedi $(\bullet)$)

$$z - f(\bar{x},\bar{y}) = f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}).$$

Notiamo che il suo vettore direzionale ha la forma

$$((\operatorname{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) \,|\, -1).$$

Es. $f(x,y) = x \ln(xy)$ (definita nel 1° e nel 3° quadrante)

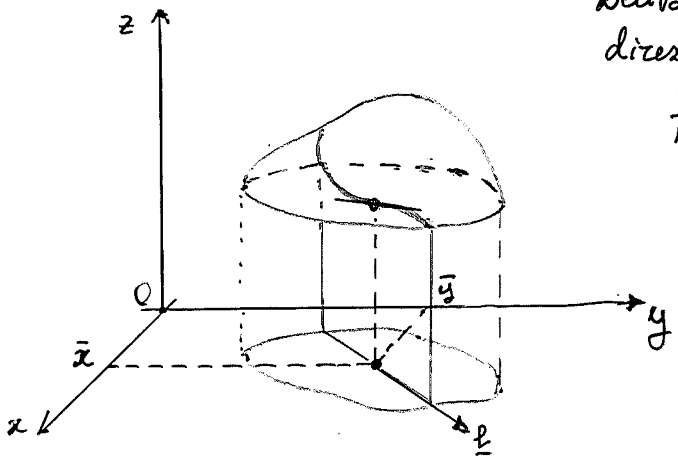
$$f_x = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(xy)+1 \quad ; \quad f_y = \frac{x}{y}$$

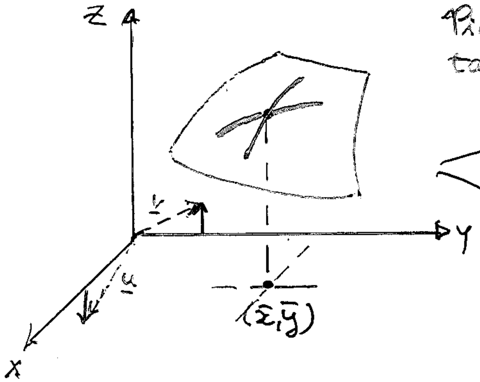
Il piano tangente al grafico nel punto di ascissa e ordinata 1 $(\Rightarrow f(1,1)=0,\ f_x=1,\ f_y=1)$ è

$$z = (x-1)+(y-1).$$

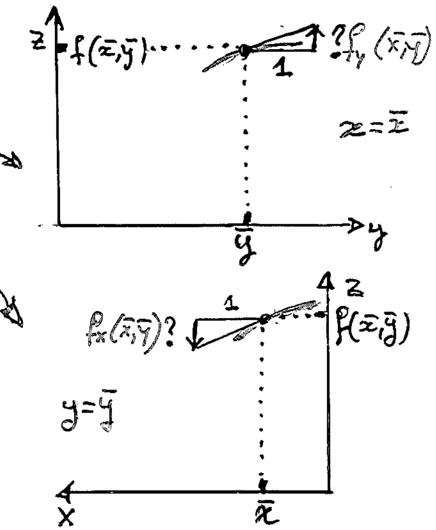
Derivata direzionale

$f_{\underline{\ell}}(\bar{x},\bar{y})$





Piano tangente

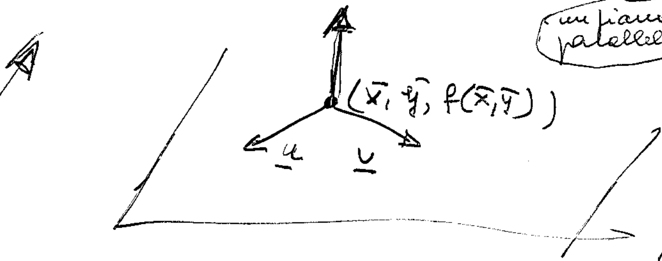


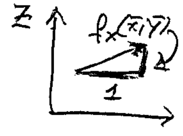
$\underline{u}=(1,0,f_x(\bar{x},\bar{y}))$

$\underline{v}=(0,1,f_y(\bar{x},\bar{y}))$

il vettore direzione del piano che contiene $\underline{u}$, $\underline{v}$ è $\underline{u}\wedge\underline{v}$

Costruzione del piano per $(\bar{x},\bar{y},f(\bar{x},\bar{y}))$ che sezionato con piano parallelo a xz dà luogo alla retta tangente in $(\bar{x},\bar{y},f(\bar{x},\bar{y}))$ al grafico di $z=f(x,\bar{y})$ e similmente, sezionato con un piano parallelo a yz...





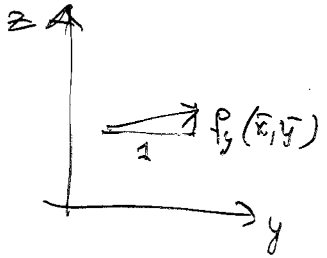
il vettore che dà la direz. della tangente in $\mathbb{R}^2$ è

$(1, f_x(\bar{x},\bar{y}))$

in $\mathbb{R}^3$ $(1,0,f_x(\bar{x},\bar{y}))$

$$\boxed{\text{eq. del piano: } (\underline{u}\wedge\underline{v})\cdot(x-\bar{x},\, y-\bar{y},\, z-f(\bar{x},\bar{y}))=0}$$

$$\underline{u}=(1,0,f_x(\bar{x},\bar{y}))$$



in $\mathbb{R}^2$ $(1, f_y(\bar{x},\bar{y}))$

in $\mathbb{R}^3$ $\underline{v}=(0,1,f_y(\bar{x},\bar{y}))$

$$\underline{u}\wedge\underline{v}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=(-f_x,-f_y,1)$$

$$\boxed{-f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})-f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})+z-f(\bar{x},\bar{y})=0}$$