Derivate seconde

Supponiamo che in ogni punto interno di E sia definita f_x e f_y e che queste funzioni abbiano derivate parziali rispetto a x e a y : nascono quattro derivate seconde

$$f_{xx} = (f_x)_x \,, \quad f_{xy} = (f_x)_y \quad f_{yx} = (f_y)_x \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

che talora vengono anche indicate così:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \,, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{derivate miste}} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nell'esempio precedente : $f(x,y) = x \ln(xy)$, si ha

$f_{xx} = (\ln(xy)+1)_x = \frac{1}{x}$; $f_{xy} = (\ln(xy)+1)_y = \frac{1}{y}$

$f_{yx} = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y}$; $f_{yy} = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$

Notiamo che in questo caso $f_{xy} = f_{yx}$. Vale in proposito il

> TEOREMA di SCHWARZ : Se le derivate parziali f_x, f_y sono continue in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ e le derivate miste f_{xy} , f_{yx} sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$.

Ma consideriamo :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. In ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ RISULTA:

$f_x(x,y) = 2\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$; $f_y(x,y) = 2\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$.

Ma in $(0,0)$ - calcolando le derivate come lim. del rapp. incr. RISULTA:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$; $f_y(0,0) = \dots = 0$

$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-2k^5}{k^4 \cdot k} = -2$; $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^5}{h^4 \cdot h} = 2$

Le derivate miste in $(0,0)$ sono diverse!! Infatti la funz. $f_{xy}(x,y)$ non è continua in $(0,0)$!

$f(x,y) = x \ln(xy)$

voglio le derivate parziali seconde

$f_x(x,y) = 1 \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1$

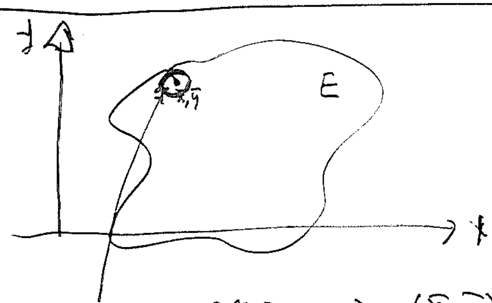
$f_y(x,y) = x\left(\ln(xy)\right)_y = x \cdot \frac{x}{xy} = \frac{x}{y}$

$f_{xx}(x,y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$

$f_{xy}(x,y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$

$f_{yx}(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y}$

$f_{yy}(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$



ILLUSTRAZ. della def a PAG. 3

$\forall (x,y)$ nel cerchio: $f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow (\bar{x},\bar{y})$ MAX locale

Ottimizzazione delle funzioni di 2 variabili

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\bar{x},\bar{y})$ un punto interno ad E.
Esso si dice punto di massimo locale se esiste un cerchio con centro in $(\bar{x},\bar{y})$ e raggio $\delta > 0$, contenuto in E

$$B_\delta(\bar{x},\bar{y}) = \{(x,y) \in E \mid \sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2} < \delta\}$$

tale che per tutti gli $(x,y) \in B_\delta(\bar{x},\bar{y})$ si abbia (diversi da $(\bar{x},\bar{y})$)

$$f(x,y) \le f(\bar{x},\bar{y})$$

Analogamente per il minimo locale.
Si dice che il massimo (o il minimo) è forte se vale $\lneq$ ($\gneq$)

Vale un analogo del teorema di Fermat (in 1 variabile):

TEOR. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con f_x, f_y continue in $(\bar{x},\bar{y})$, punto interno a E. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ la f ha massimo locale (o minimo locale) allora il gradiente di f in $(\bar{x},\bar{y})$ è nullo.

Che cosa significa?

$\Rightarrow (\text{grad } f)(\bar{x},\bar{y}) = (f_x(\bar{x},\bar{y}), f_y(\bar{x},\bar{y}))$

$$\text{grad } f = \underline{0} = (0, 0) \Rightarrow \begin{array}{l} f_x(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ f_y(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ piano tangente

prod. scalare

$$\underbrace{z - f(\bar{x},\bar{y}) = \underbrace{(\text{grad } f)}_{\underline{0}}(\bar{x},\bar{y}) \cdot (x-\bar{x}, y-\bar{y})}_{=0}$$

$$\Rightarrow z = f(\bar{x},\bar{y})$$

La cosa è abbastanza logica, poiché mi aspetto che ci sia un piano tangente e mi aspetto che tale piano sia // xOy.
Il teorema precedente è una condizione necessaria: dice tra quali punti cercare gli estremi locali (qualora f sia differenziabile). I punti a gradiente nullo sono detti PUNTI CRITICI: tra essi bisogna distinguere i veri punti estremanti dai punti di sella. Allo scopo si possono guardare le derivate seconde: l'idea che c'è dietro è che si può migliorare l'approssimazione lineare di f(x,y) usando un polinomio di 2° grado invece che di primo:

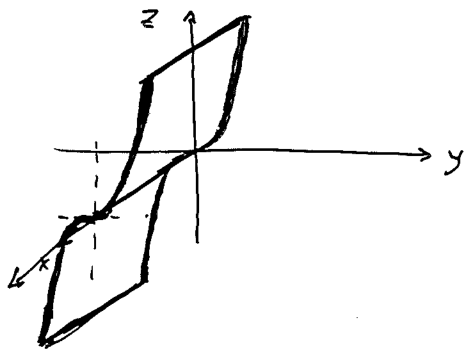
$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{h^2}{2} + (f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y}))\frac{hk}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2)$$

??? VEDI pag 7A

Punti di sella ... che non sono VERE selle:

$f(x,y) = y^3$ cioè $z = y^3$.

Il suo grafico si trova traslando lungo l'asse x quello della cubica rappresentata nel piano yz da $z = y^3$:



$(x,0,0)$ sono punti di sella che non hanno l'aspetto di una sella

Proviamo a capire che cosa succede quando $f(x,y)$ è proprio un polinomio di 2° grado

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ ha minimo locale (e globale) in $(0,0)$

$$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = 2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2$$

2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ ha massimo locale (e globale) in $(0,0)$

$$f_x = -2x \Rightarrow f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$$

3. $f(x,y) = x^2-y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

$$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$$

E' poi chiaro che se in questa funzione sostituisco

$\begin{cases} x-y = \sqrt{2}\,u \\ x+y = \sqrt{2}\,v \end{cases}$ ottengo $g(u,v) = 2uv$ che ha grafico che è solo ruotato del precedente e quindi in $(0,0)$ ha ancora un punto di sella. In questo caso

$$g_u = 2v \Rightarrow g_{uu} = 0 \quad g_{uv} = 2$$
$$g_v = 2u \Rightarrow g_{vu} = g_{uv} = 2 \quad g_{vv} = 0$$

Si intuisce quindi che la cosa importante non è il segno della singola derivata seconda. C'è invece un dato che distingue i primi 2 casi dai secondi 2: **nel caso 1 e nel caso 2**

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} > 0 \; ;$$

negli altri **due** casi il verso della disuguaglianza è opposto.
In effetti, denotato il determinante $\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}$

con $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y})$ (Hessiano di f) si dimostra che

TEOR. $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, dotata di derivate parziali 1ª e 2ª continue. Se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico per f (cioè se $(\operatorname{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$)

i) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$: $(\bar{x},\bar{y})$ non è un estremante

ii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ e $\begin{cases} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ è pto di min. locale forte} \\ f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ '' '' MAX '' ''} \end{cases}$

(iii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ si deve procedere ad un'analisi ulteriore.

VEDI PAG 7B e seguenti → pag 12.

Un punto critico non estremante viene spesso detto "di sella" anche se la funzione non presenta una vera sella. Vedi $f(x,y) = x^3$ nei punti $(0,y)$.

ESEMPIO SPINOSO DOPO PAG 12

$f(x,y) = (y-x^2)(y-1)^2$. Il sist. $\begin{cases} f_x = -2x(y-1)^2 = 0 \\ f_y = (y-1)(3y-1-2x^2) = 0 \end{cases}$ dà i punti critici:

$(0, 1/3)$, $(x,1)$ con x variabile comunque in $\mathbb{R}$.

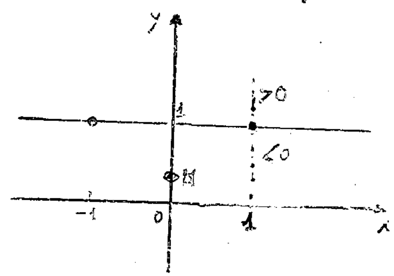
$$f_{xx} = -2(y-1)^2 \; , \; f_{xy} = f_{yx} = -4x(y-1) \; , \; f_{yy} = 6y-4-2x^2$$

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} -2(y-1)^2 & -4x(y-1) \\ -4x(y-1) & 6y-4-2x^2 \end{vmatrix} = 4(y-1)^2(x^2-3y+2-4x^2)$$

$\Rightarrow \mathcal{H}_f(0,1/3) = 4(1/3-1)^2(2-1) > 0$: punto estremante

$f_{xx}(0,1/3) = -2(2/3)^2 < 0 \Rightarrow$ MAX locale. VALORE: 4/27

Invece $\mathcal{H}_f(x,1) = 0$. Quindi bisogna vedere che cosa succede in un intorno dei vari punti, tenuto conto che $f(x,1) = 0$.



In $(1,1)$ si ha un punto di sella. Infatti $f(1,1+k) = k^2 \cdot k \; \begin{matrix} > 0 \text{ se } k > 0 \\ < 0 \text{ se } k < 0 \end{matrix}$,

Idem in $(-1,1)$: $f(-1,1+k) = k^3 \ldots$

Se $|x| < 1$ invece:

$f(x+h, 1+k) = k^2(1+k-(x+h)^2)$: se prendo h tale che $|h|$ sia **abbastanza piccolo**, $|x+h| < 1$ e quindi $(x+h)^2 < 1$; allora se $k > 0$ sicuramente $1+k-(x+h)^2 > 0$; ma anche se prendo $k < 0$ ma tale che $k > (x+h)^2 - 1$ trovo valori **positivi** : c'è **tutto un** rettangolo in cui $f(x+h, 1+k) > f(x,1) = 0 \Rightarrow$ MINIMI LOCALI. Similmente se $|x| > 1$: MAX LOCALE

(A)

$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) =$

$$(\text{grad} f)_{(\bar{x},\bar{y})} \cdot (h,k) + \frac{1}{2}(h,k) \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}}_{\text{focalizzarsi su questa matrice}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} +$$

$$+ o(h^2+k^2)$$

(B)

$$H_f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix} =$$

$$f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) \cdot f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) - f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) =$$

se derivate 1° e 2° sono continue $\Rightarrow$ SCHWARTZ $f_{xy} = f_{yx}$

$$\Rightarrow H_f(\bar{x},\bar{y}) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{xy})(\bar{x},\bar{y})$$

$$= \left(f_{xx} f_{yy} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{\leq 0}\right)(\bar{x},\bar{y})$$

Conseguenze:

1) $f_{xx} f_{yy} \leq 0 \Rightarrow$ ho sicuramente una sella.

2) Se $H_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$, deve essere $f_{xx} \cdot f_{yy} > 0$. Per decidere se $(\bar{x},\bar{y})$ è MAX o min si può guardare il segno di f_{yy} invece di quello di f_{xx}

7

$\boxed{f(x,y) = x(y^2 - x - 1)}$: trovare i punti critici e studiarli

8

Punti critici: $\text{grad} f = (0,0)$?

$f_x(x,y) = y^2 - 2x - 1$

$f_y(x,y) = 2xy$

$\Rightarrow \text{grad} f = (y^2 - 2x - 1, 2xy)$

$$\begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$A = (0,1)$ $B = (0,-1)$ $C = (-1/2, 0)$

Questi sono i punti critici

Calcolo le derivate parziali II:

$f_{xx} = -2$ $f_{xy} = 2y$

$f_{yx} = 2y$ $f_{yy} = 2x$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = -4x - 4y^2$$

A, B:

se considero A, B : $H_f(0, \pm 1) = -4 < 0 \Rightarrow$ SELLE

se considero C : $H_f(-1/2, 0) = -4 \cdot (-1/2) - 0 = 2 > 0$; $f_{xx} = -2 < 0$

C: MAX.

$$\boxed{f(x,y) = x\left(x^2+\frac{y^2}{9}-1\right)}$$

cercare punti critici ed estremanti locali

$$f_x = 3x^2+\frac{y^2}{9}-1 \qquad f_y = \frac{2}{9}xy$$

$\Rightarrow$ grad $f=0$ se e solo se

$$\begin{cases} 3x^2+\frac{y^2}{9}-1=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+\frac{y^2}{9}-1=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+\frac{y^2}{9}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,\pm 3)$$

$$\begin{cases} 3x^2=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (\pm 1/\sqrt{3}, 0)$$

4 punti critici

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = \frac{2}{9}y$$

$$f_{yx} = \frac{2}{9}y \qquad f_{yy} = \frac{2}{9}x$$

$$\Rightarrow H_f = \begin{vmatrix} 6x & 2/9\, y \\ 2/9\, y & 2/9\, x \end{vmatrix} = \frac{2}{9}\left(6x^2-\frac{2}{9}y^2\right)$$

se considero $(0,\pm 3)$ $\quad H_f(0,\pm3) = \frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 9 < 0$

punti di SELLA

se considero $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ $\quad H_f\left(\pm 1/\sqrt{3},0\right) = \frac{2}{9}\cdot 6\cdot\frac{1}{3} > 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$: min loc forte

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$: MAX loc forte

ESERCIZI A CASA

Trovare i punti critici e gli estremi locali di

$$f(x,y) = (y-x^3)(y-x)$$

$$f(x,y) = (x^2-2x)(y+x-1)$$

$$f(x,y) = (y-x^2+1)(y+x^2-1) = y^2-(x^2-1)^2$$

$$f(x,y) = x^4-4x^2y^2+y^4+5x^2-y^2$$

$f(x,y) = x^2\sqrt{y} - xy + y^2$ in quali regioni del piano la funzione e le sue derivate parziali sono definite?

$$\boxed{f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4}$$

Punti critici:

$$f_x = 4x^3 - 12xy^2 = 4x(x^2-3y^2)$$

$$f_y = -12x^2y + 4y^3 = 4y(-3x^2+y^2)$$

$$\begin{cases} x(x^2-3y^2)=0 \\ y(y^2-3x^2)=0 \end{cases}$$ dà luogo a 4 sistemi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y^2-3x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3y^2=0 \\ 3x^2-y^2=0 \end{cases}$$

$(0,0)$

$$\begin{cases} 4x^2-4y^2=0 \\ x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=y^2 \\ -2x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad y=0 \ \Uparrow$$

l'unico punto critico è $(0,0)$

$f_{xx} = 12x^2 - 12y^2 \qquad f_{xy} = -24xy$

$f_{yx} = -24xy \qquad f_{yy} = -12x^2 + 12y^2$

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

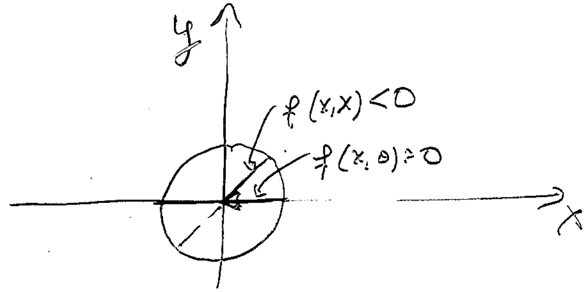
Non posso applicare il criterio sufficiente dato a pag 6.

Cerco di capire che cosa succede in un intorno di $(0,0)$

$f(0,0) = 0$

$f(x,0)$ con $x \neq 0$? $\quad f(x,0) = x^4 > 0$

$f(x,x)$ con $x \neq 0 \quad f(x,x) = x^4 - 6x^4 + y^4 = -4x^4$



quindi non per tutti i punti (x,y) del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio δ opportuno ($\bar{\delta}=1$)

si ha $f(x,y) \geq f(0,0)$

né che $f(x,y) \leq f(0,0)$ $\Longrightarrow$ non è estremante

$\Downarrow$

Sella

A questo punto si può affrontare l'esempio spinoso a pag 6

Esempi di studio di ottimizzazione di tipo teorico

1) Siano dati n punti $P_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,\dots,n)$ nel piano. Trovare un punto $P=(x,y)$ t.c. la somma dei quadrati delle distanze di P dai P_i sia minima.

$$S(x,y)=\sum_1^n \left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]$$

Punti critici:
$$\begin{cases} S_x=\sum_1^n 2(x-x_i) = 2\left(nx-\sum_1^n x_i\right)=0 \\ S_y=\sum_1^n 2(y-y_i) = 2\left(ny-\sum_1^n y_i\right)=0 \end{cases}$$

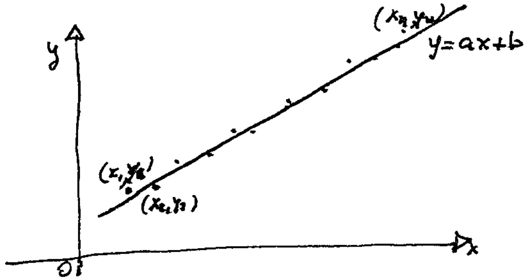
Il punto critico è $\left(\frac{1}{n}\sum x_i, \frac{1}{n}\sum y_i\right)$ ... baricentro

$S_{xx}=2n=S_{yy}$ mentre $S_{xy}=S_{yx}=0 \Rightarrow H_S=\begin{vmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n\end{vmatrix}>0$

$S_{xx}>0 \Rightarrow$ il baricentro è effettivamente il punto di minimo

2) Metodo dei minimi quadrati

Consideriamo n punti $P_i=(x_i,y_i)$ $(i=1\dots n)$: osservazioni sperimentali di 2 variabili su una certa popolazione. Se supponiamo che tra le due variabili ci sia un legame lineare (entro i limiti dell'errore sperimentale) possiamo cercare la retta $y=ax+b$ che meno si discosta dal passare per gli n punti.



Definiamo errore quadratico totale $E(a,b)=\sum_1^n (ax_i+b-y_i)^2$

Lo minimizziamo: la retta ottenuta in qs modo sarà detta retta di regressione.

$$\begin{cases} E_a=\sum 2x_i(ax_i+b-y_i)=0 \\ E_b=\sum 2(ax_i+b-y_i)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sum(x_i^2a+x_ib-x_iy_i)=0 \\ 2\left(a\sum x_i+nb-\sum y_i\right)=0 \end{cases}$$

Chiamo: $\sum x_i^2=P$, $\sum x_i=Q$, $\sum y_i=R$, $\sum x_iy_i=S$

e riscrivo $\begin{cases} Pa+Qb=S \\ Qa+nb=R \end{cases}$ Nota: $nP-Q^2=n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2>0$ (*) $\forall n\geq 2$ se gli x_i sono distinti!

$$\Rightarrow \bar a=\frac{nS-RQ}{nP-Q^2}, \quad \bar b=\frac{PR-SQ}{nP-Q^2}$$

Inoltre $E_{aa}=2P$, $E_{ab}=2Q=E_{ba}$, $E_{bb}=2n \Rightarrow H=4\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & n\end{vmatrix}>0$

e $P>0 \Rightarrow (\bar a,\bar b)$ minimo $\Rightarrow$ $y=\bar a x+\bar b$ è la retta di regressione

---

(*) $n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2$