Studiare i punti critici di
$f(x,y) = y^2 - (x^2-1)^2$

(1)

1) Individuazione

$f_x = -2(x^2-1)2x = -4x(x^2-1)$
$f_y = 2y$

Chiedo che $(f_x, f_y) = (0,0)$

$$\begin{cases} x(x^2-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{3 punti critici } (0,0), (1,0), (-1,0)$$

2) Studio i punti critici:

$f_{xx} = -4(3x^2-1)$ $\quad f_{xy} = 0$
$f_{yx} = 0$ $\quad f_{yy} = 2$ $\Rightarrow H_f = \begin{vmatrix} -4(3x^2-1) & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = -8(3x^2-1)$

$H_f(0,0) = 8 > 0 \Rightarrow (0,0)$ estremante locale
$f_{yy} = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ MINIMO LOCALE FORTE

$f(0,0) = -1$

$H_f(\pm 1, 0) = -8(3-1) < 0 \Rightarrow (-1,0), (1,0)$ punti di sella

$f(\pm 1, 0) = 0$

Studiare i punti critici di $f(x,y) =$
$= (y-x^3)(y-x) = y^2 + y(-x-x^3) + x^4$

(2)

1) Individuazione

$f_x = y(-1-3x^2) + 4x^3$
$f_y = 2y - x - x^3$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x(1+x^2)(-1-3x^2) + 4x^3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+x^2)(-1-3x^2) + 8x^2 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{2}x(1+x^2) \end{cases}$$

$\downarrow$

$O = (0,0)$

per risolvere la I equazione, sostituisco $t = x^2$ $(t \geq 0)$

$-3x^4 - 4x^2 - 1 + 8x^2 = 0$
$3x^2 - 4x^2 + 1 = 0$ $\Updownarrow$ posto $x^2 = t (\geq 0)$
$3t^2 - 4t + 1 = 0$ $\quad t = 1 \quad t = \frac{1}{3}$
$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $\qquad x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\frac{1}{2}(1+1) = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{3} \\ y = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$A = (1,1) \quad B = (-1,-1) \qquad C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad D = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$

2) Studio di O, A, B, C, D.

$f_{xx} = -6xy + 12x^2$ $\quad f_{xy} = -1-3x^2$; $H_f = \begin{vmatrix} 12x^2 - 6xy & -1-3x^2 \\ -1-3x^2 & 2 \end{vmatrix}$
$f_{yx} = -1-3x^2$ $\quad f_{yy} = 2$

$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ $(0,0)$: punto di sella

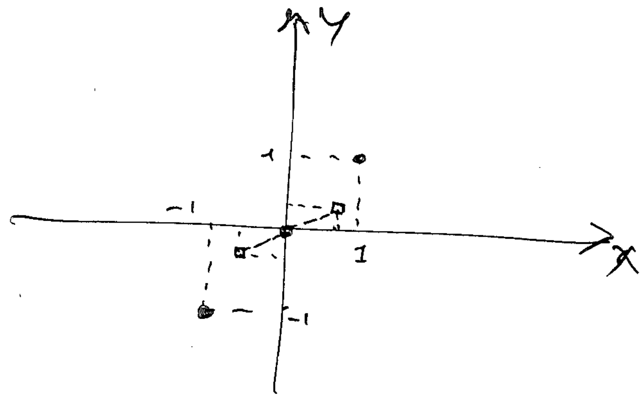
$H_f(\pm 1, \pm 1) = \begin{vmatrix} 12\cdot 1 - 6\cdot 1 & -1-3\cdot 1 \\ -1-3\cdot 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 < 0 \Rightarrow$ A, B: punti di sella

$$H_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt3}, \pm\frac{2}{3\sqrt3}\right) = \begin{vmatrix} 12\cdot\frac{1}{3} - \frac{6\cdot 2}{3\cdot 9} & -1-3\cdot\frac{1}{3} \\ -1-3\cdot\frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\frac{4}{9} & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4\cdot\frac{8}{9} & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} > 0 \implies \text{punti estremanti}$$

$f_{yy} = 2 > 0$

$\implies$ MINIMI LOCALI FORTI



Trovare punti critici e studiarli:

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 + 5x^2 - y^2 = f(x,y)$$

1) Individuazione

$$f_x = 4x^3 - 8xy^2 + 10x \qquad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ?$$
$$f_y = -8x^2y + 4y^3 - 2y$$

$$\begin{cases} x(2x^2-4y^2+5)=0 \\ y(-4x^2+2y^2-1)=0 \end{cases}$$ Si spezza in 4 sistemi

I $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \implies O=(0,0)$ è punto critico

II $\begin{cases} x=0 \\ -4x^2+2y^2=1 \end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \\ y^2=1/2 \end{cases} \implies A=(0, 1/\sqrt2)$, $B=(0,-1/\sqrt2)$

III $\begin{cases} 2x^2-4y^2+5=0 \\ y=0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x^2+5=0 \\ y=0 \end{cases} \implies \emptyset$

IV $\begin{cases} 2x^2-4y^2+5=0 \\ 4x^2-2y^2+1=0 \end{cases}$ è un sistema lineare in $\underset{t}{x^2}, \underset{s}{y^2}$

sottraggo 2 volte la 1a equazione alla 2a

$$\begin{cases} 2x^2-4y^2+5=0 \\ 0+6y^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-6+5=0 \\ y^2=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$ Ci sono 4 soluzioni $C=\left(\frac{1}{\sqrt2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$D=\left(\frac{-1}{\sqrt2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $E=\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$F=\left(\frac{-1}{\sqrt2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

7 punti critici

2) Studio dei punti critici

$f_x = 4x^3 - 8xy^2 + 10x$

$f_y = -8x^2y + 4y^3 - 2y$

$f_{xx} = 12x^2 - 8y^2 + 10 \qquad f_{xy} = -16xy$

$f_{yx} = -16xy \qquad f_{yy} = -8x^2 + 12y^2 - 2$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2a\cdot 2d - 2b\cdot 2c = 4(ad-bc)}$$
OSSERVAZIONE

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 6x^2-8y^2+5 & -8xy \\ -8xy & -4x^2+6y^2-1 \end{vmatrix} = H_f$$

$$H_f(0,0) = 4\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{SELLA}$$

$$H_f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\begin{vmatrix} -2+5 & 0 \\ 0 & 3-1 \end{vmatrix} = 6\cdot 3\cdot 2 > 0$$

A, B sono estremanti, $f_{xx} = 3 > 0$
$\Rightarrow$ MIN locali forti

$$H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 4\begin{vmatrix} 3-6+5 & -8(\pm)\sqrt{\frac{3}{4}} \\ -8(\pm)\sqrt{\frac{3}{4}} & -2+9-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(2\cdot 6 - 64\cdot\frac{3}{4}\right) = 4(12-48) < 0$$

C, D, E, F : SELLE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In **cinematica** si affronta il problema: dato un corpo - che a un certo istante iniziale t_0 ha una certa posizione e una certa velocità - sottoposto ad una certa accelerazione qual è l'equazione del moto?

Es.: $a = 0 \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

$a = \text{cost.} \neq 0 \Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = -k^2 s \Rightarrow$ moto armonico.

Visto che l'accelerazione è la derivata seconda $\ddot{s}$ dello spostamento s, tutte le equazioni scritte coinvolgono la funzione s e le sue derivate (e - anche se in maniera meno palese - il tempo) e sono perciò esempi di equazioni differenziali.

In generale si parla di EQUAZIONE DIFFERENZIALE ogni volta che si ha un'**equazione che lega**:

- la variabile indipendente t
- un certo numero di sue funzioni (eventualmente costanti) NOTE
- UNA FUNZIONE $y(t)$ e un certo numero di sue DERIVATE da considerare come incognite.

Posso esprimere questo simbolicamente dicendo che l'eq. ha la forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

ove F è una funzione di $n+2$ variabili.

L'ordine dell'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione ($: n$).

Negli esempi: eq. diff. di 2° ordine.

ESEMPI

7

$\ln(t - y'(t)\cdot y(t) + t^2 - 1) - e^t = 0$

è un eq differenziale

non so se è risolubile, dove lo è ecc,

ma compare $y'(t)$ e $y(t)$ come

incognite $\Rightarrow$ eq. diff.

$y'(t) - \ln t = 0$ è un eq. diff.

$y'(t) = \ln t$: significa:

"la derivata di $y(t)$ è $\ln t$"

cioè "$y(t)$ è primitiva di $\ln t$"

Ce ne sono infinite

$$y(t) = \int \ln t \, dt = t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\, dt =$$
$$= t\ln t - t + c$$

$\Rightarrow$ le funzioni: $t\ln t - t + c$ al variare di c in $\mathbb{R}$ sono tutte e sole le soluz. dell'eq. diff.

Risolvere un eq. differenziale significa trovare una funzione $y(t)$ tale che, sostituendo lei e le sue derivate nell'equazione, si trovi un'identità.

In generale l'equazione differenziale da sola non individua univocamente "la soluzione" del problema: questo è il motivo per cui, quando cerco l'equazione del moto di un ben preciso corpo, non mi accontento di dire ades.:

è sottoposto ad accelerazione nulla

ma do anche le condizioni iniziali relative alla posizione e alla velocità. Anche supponendo di prendere sempre come posizione iniziale

$$s_0 = 0$$

è ben diverso supporre che il corpo abbia una velocità iniziale $v_0 = 1$ m/s piuttosto che $v_0 = -1$ m/s o $v_0 = 0$ m/s !

La famiglia di funzioni che (prescindendo dalle condizioni iniziali) sono soluzione di una certa equazione differenziale prende il nome di

integrale generale dell'eq. diff.

Il problema di stabilire quale delle funzioni di tale famiglia (= soluzione particolare) soddisfa determinate condizioni iniziali prende il nome di PROBLEMA di CAUCHY.

Come sempre quando si parla di equazioni, ci sono due aspetti del problema: la risolubilità e il calcolo effettivo delle soluzioni.

OSS. Perché chiamare integrale generale l'insieme di tutte le funzioni sol. dell'eq. diff. ?
Perché il problema di risolvere eq. diff. è una generalizzazione di un'altro ben noto problema:

$y'(t) = f(t)$ è un'equazione differenziale; risolverla significa trovare tutte le primitive di $f(t)$, cioè calcolare $\int f(t)\,dt$.

E' ben noto che se $f(t)$ è continua le primitive esistono, sono infinite e che se $F(t)$ è una di esse tutte le altre hanno la forma

$$F(t)+c \qquad c \in \mathbb{R}$$

In questo caso posso individuare univocamente la funzione "soluzione particolare" dando la condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0 .$$

Trovo infatti $F(t_0) + c = y_0 \Rightarrow c = y_0 - F(t_0)$
Quindi in questo caso il problema di Cauchy è risolto dalla funzione $y(t) = F(t) - F(t_0) + y_0$

Equazione di questo tipo è $\ddot{s} = a$, pensata come equazione differenziale in $\dot{s}$:
$\dot{s} = at + c$ è l'integrale generale e se pongo
$\dot{s}(0) = v$ trovo $c = v \Rightarrow$ soluzione particolare:
$\dot{s} = at + v$.
A sua volta questa può essere pensata come equazione diff. (dello stesso tipo visto sopra) in s:
$s = \frac{1}{2}at^2 + vt + c$ integrale generale e se $s(0)=0 \Rightarrow$ soluz. particolare $s = \frac{1}{2}at^2 + vt$.

EQ. DIFF. del 1° ordine.

Hanno la forma: $F(t, y(t), y'(t)) = 0$
Ogni funzione $\varphi(t)$ derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ è una soluzion
Delle equazioni del 1° ordine quelle che si studiano meglio sono le cosiddette eq. diff. del 1° ordine in FORMA NORMALE:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Per esse vale il seguente teorema (che garantisce la risolubilità del problema di Cauchy):

TEOR. Se $f(t,y)$ e $f_y(t,y)$ sono entrambe continue allorché t varia in $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ e y varia in $\mathbb{R}$, allora esiste un'unica funzione $y(t)$, definita in un intorno di t_0 e ivi continua e derivabile soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: non è comunque detto che l'integrale sia ricavabile in forma esplicita: in caso negativo si ricorre a metodi di "integrazione approssimata" (Eulero, Runge-Kutta, ...).

Noi ci occuperemo di due situazioni in cui l'integrale si ricava in forma analitica esplicita:
- equazioni differenziali a variabili separabili
- equazioni " lineari del 1° ordine.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Siano $a(t)$ e $b(y)$ due funzioni continue rispettivamente su due intervalli I e J di $\mathbb{R}$. Un'eq. diff. del tipo

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

è detta a variabili separabili

Se $\bar{y}$ è uno zero di $b(y)$, le funzione

$$y(t) = \bar{y}$$

è una soluzione.

Su ogni intervallo $J' \subseteq J$ in cui $b(y) \neq 0$ l'eq. diff. si riscrive come

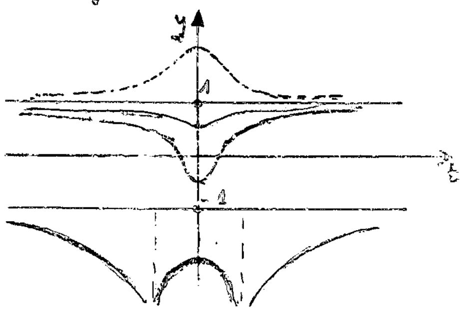
$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)\, dt \qquad \left(y'(t) = \frac{dy}{dt}\right)$$

Così abbiamo separato le due variabili y e t.
Allora l'integrale generale – in forma implicita – è dato da

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\, dt + c$$

Perché il problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione definita in un intorno di t_0 basterà che $b(y)$ sia derivabile con derivata prima continua in un intorno di $y_0 = y(t_0)$.
Nei nostri esempi funzionerà.

Bisognerà però stare attenti a scegliere l'espressione corretta dell'integrale generale in dipendenza da y_0 e l'intervallo che si pensa come dominio in dipendenza da t_0.



IN FIGURA sono sommariamente rappresentati 6 integrali particolari dell'eq. diff. del successivo ES.1
E' chiaro che a seconda del valore di $y(t)$ ad es. in $t_0 = 0$, si prendono PISTE DIVERSE.

$$y' = a(t)\, b(y) \qquad (*)$$

Se $b(\bar{y}) = 0$ per un $\bar{y} \in \mathbb{R}$

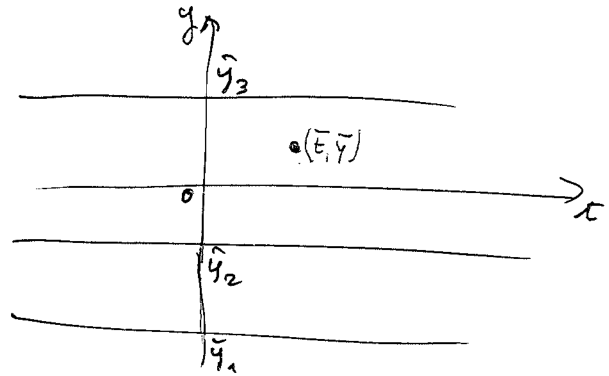
$\Longrightarrow$ $y(t) = \bar{y}$ è una soluzione

perché

$y'(t) = 0$ e sostituendo in $(*)$ si ha

$$0 \overset{?}{=} a(t) \cdot \underbrace{b(\bar{y})}_{=0}$$

Sì



Le varie soluzioni di questo tipo (in figura: $y = \bar{y}_1$, $y = \bar{y}_2$, $y = \bar{y}_3$) hanno per grafico rette // asse x

Se $b'(y)$ è continua vale il TEOR di CAUCHY $\Rightarrow$ $\forall (\bar{t}, \bar{y})$ passa 1 solo grafico soluzione $\Rightarrow$ non possono essere attraversate le $y = \bar{y}_i$!

COME SI PROCEDE DA $y'(t) = a(t)\, b(y)$?

$$\Downarrow$$

$$\frac{y'(t)}{b(y)} = a(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y'(t)\, dt}{b(y)} = a(t)\, dt \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = a(t)\, dt \Rightarrow \text{integrare}$$

Esempio 1

$$\begin{cases} y' = 2t\,(1-y^2) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

(dovrei scrivere $y'(t) = 2t\,(1-(y(t))^2)$)

È a variabili separabili?

$$a(t) = 2t \qquad b(y) = 1-y^2$$

$$y' = a(t)\,b(y)$$

1) sol. particolari: $1-y^2=0 \Rightarrow y(t)=1,\ y(t)=-1$

nessuna delle due è Sol del probl. di Cauchy

2) integrale generale

$$\int \frac{y'\,dt}{1-y^2} = \int 2t\,dt$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int 2t\,dt$$

Calcolo $\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{1+y}\right] =$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A+B+y(A-B)}{1-y^2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \qquad A=B=\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|y-1| + \ln|1+y|\right) + c_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{y-1}\right| + c_1$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{y-1}\right| + c_1 = t^2 + c_2$$

$$\Rightarrow^{(\bullet)} \ln\left|\frac{1+y}{y-1}\right| = 2t^2 + C \qquad 2(c_2-c_1)=C$$

integrale generale in forma IMPLICITA

per esplicitare in generale (senza probl. di CAUCHY) dovrei risolvere risp. a y

$$\left|\frac{1+y}{y-1}\right| = e^{2t^2+C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1+y}{y-1} = \pm e^{2t+C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1+y}{y-1} = \left(\pm e^{C}\right)\cdot e^{2t}$$

$\left\{ |x|=3 \iff x=\pm 3 \right\}$

al variare di c $\pm e^{c} = k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se prendo $k=0$ rappresento una soluzione dell'eq. differenziale? Sì rappresento la Sol part. $y=-1$

$\Rightarrow$ faccio variare k in tutto $\mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{1+y}{y-1} = k e^{2t}}$$

problema da risolvere a casa

Invece VISTO CHE ABBIAMO IL PROBLEMA di CAUCHY $y(0) = 1/2$

arrivati a $(\bullet)$ diciamo: la soluzione ha grafico che non può intersecare quello delle soluzioni particolari $y(t)=1$ e $y(t)=-1$ (PAG 12) $\Rightarrow y(t)$ varia nell'intervallo $(-1,1)$

$\Rightarrow \left|\frac{1+y}{y-1}\right| = \frac{1+y}{1-y}$. Vado a sostituire $y=1/2 \quad t=0$

$$\ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = 2\cdot 0 + c \Rightarrow c = \ln 3$$