EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

L'eq. di Verhulst è un'aggiustamento della più celebre (anche se meno adeguata) equazione di MALTHUS (1798):

$$(*) \qquad N'(t) = \varepsilon N(t)$$

che si ottiene osservando che (se trascuro la capacità dell'ambiente) la funzione $(\lambda-\mu)N(t)$ esprime l'incremento – o la diminuzione – di popolazione nell'unità di tempo, cioè

$$(\lambda-\mu)N(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

e facendo tendere a 0 il Δt.

Un'eq. come la $(*)$ viene detta eq. diff. LINEARE del 1° ordine OMOGENEA.

In generale parlo di <u>eq. diff. LINEARE del 1° ordine</u> quando nell'equazione che lega $y(t)$ e $y'(t)$ queste due funzioni compaiono con grado 1: dunque quando hanno la forma

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t) \qquad \text{con } a(t) \text{ e } f(t) \text{ continue su } I \subset \mathbb{R}$$

Se $f(t)=0$ si parla di EQUAZIONE OMOGENEA
Altrimenti " " " COMPLETA.

TEOREMA: L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

si ottiene aggiungendo all'integrale generale della omogenea associata

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

una soluzione particolare di quella completa: (dimostrazione a LATO)

STESSA SITUAZIONE CHE NEI SISTEMI LINEARI

Se la $\bar{y}(t)$ è soluzione dell'eq. diff. lin. del I ord.

$$(*) \qquad y' + a(t)y = f(t)$$

ogni altra soluzione si trova sommando a $\bar{y}(t)$ una soluzione dell'eq. diff. lin. omog. ass.

$$(**) \qquad z' + a(t)z = 0$$

<u>Dim.</u> ① Sia $\bar{z}(t)$ è una soluz. di $(**)$ allora mostro che $\bar{z}+\bar{y}$ è soluz. di $(*)$.

$\bar{y}$ soluz. di $(*)$: $\bar{y}' + a(t)\bar{y} = f(t) \quad \forall t \in I \ldots$
$\bar{z}$ " " $(**)$: $\bar{z}' + a(t)\bar{z} = 0 \quad \forall t \in I$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y}'+\bar{z}' + a(t)(\bar{y}+\bar{z}) = f(t) \quad \forall t \in I$$

cioè

$$(\bar{y}+\bar{z})' + a(t)(\bar{y}+\bar{z}) = f(t) \quad \forall t \in I$$

$\Longrightarrow \bar{y}+\bar{z}$ è soluz. dell'eq. diff. lineare completa.

② Siano $\bar{y}(t)$ e $\bar{\bar{y}}(t)$ due soluz. di $(*)$ cioè

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}' + a(t)\bar{y}(t) &= f(t) \\ \bar{\bar{y}}' + a(t)\bar{\bar{y}}(t) &= f(t) \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in I$$

allora $\bar{y}-\bar{\bar{y}}$ è soluz. dell'eq. diff. lineare del I ord. <u>omogenea</u> <u>associata</u>. Infatti:

$$\bar{y}'-\bar{\bar{y}}' + a(t)(\bar{y}-\bar{\bar{y}}) = f(t) - f(t) \quad \forall t \in I$$

$$(\bar{y}-\bar{\bar{y}})' + a(t)(\bar{y}-\bar{\bar{y}}) = 0 \quad \forall t \in I$$

$\Longrightarrow$ VERO

PROBLEMI:
1) come trovo la soluzione dell'omogenea?
2) come trovo una sol. particolare?

Soluzione dell'equazione omogenea

$y'(t) = -a(t)\,y(t)$ è un'equazione a variabili separabili!

Ha una soluzione costante: $y(t) = 0$

mentre se $y(t) \neq 0$ si ha

$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt$ cioè $\ln|y| = -A(t) + k$, $k \in \mathbb{R}$

($A(t)$ primitiva di $a(t)$)

cioè $y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}$ cioè $y = c\,e^{-A(t)}$ con $c \neq 0$.

Dando a c la possibilità di annullarsi, si rappresenta anche la soluzione costante. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = c\,e^{-A(t)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

ES. Le soluzioni dell'equazione di Malthus hanno la forma $N(t) = c\,e^{\varepsilon t}$ .... CRESCITA o DECADIMENTO ESPONENZIALE.

Ricerca di una soluzione particolare

Usiamo il metodo DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE, cioè cerchiamo la soluzione tra le funzioni della forma

$$\bar{y}(t) = c(t)\,e^{-A(t)}$$

ove $c(t)$ non è più costante.

$\bar{y}'(t) = (c'(t) - c(t)a(t))\,e^{-A(t)}$ ∴ quindi sostituendo nell'eq. differenziale COMPLETA devo avere

$(c'(t) - c(t)a(t))e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$ cioè

$c'(t)\,e^{-A(t)} = f(t)$ o anche $c'(t) = f(t)\,e^{A(t)}$

cioè $c(t)$ è una primitiva di $f(t)\,e^{A(t)}$: $G(t)$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = G(t)\,e^{-A(t)}$

$y' = -a(t)y$

esplicitazione

Sol. part. : $y(t) = 0$

$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt$

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$\ln|y| = -A(t) + k \qquad k \in \mathbb{R}$

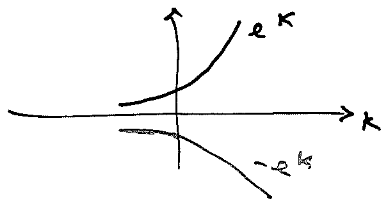
$|y| = e^{-A(t)+k}$

$y = \pm e^{-A(t)+k}$

$y = \underbrace{\pm e^{k}}\, e^{-A(t)}$

$e^{k} > 0$

$-e^{k} < 0$



MAI $\pm e^{k} = 0$! . $y = c\,e^{-A(t)}$ $(c \neq 0)$

Ma se considero un coeff. $c \in \mathbb{R}$ senza la restrizione $c = 0$ faccio un errore?

No poiché per $c = 0$ ritrovo la soluzione $y(t) = 0$ (Sol. particolare). $\Rightarrow$ le sol. dell'eq. diff. lineare omogenea del I ordine

$$y' + a(t)\,y = 0$$

Sono tutte e sole quelle del tipo $\boxed{y = c\,e^{-A(t)} \quad c \in \mathbb{R}}$

con $A'(t) = a(t)$

Ed 13

Dunque l'integrale generale di

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

ha la forma

$$y(t) = (c + G(t))\, e^{-A(t)}$$

ove: c varia comunque nei numeri reali

$A(t)$ è una primitiva (fissata) di $a(t)$

$G(t)$ è " " " di $f(t)\, e^{A(t)}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

basta imporre: $y(t_0) = (c + G(t_0))\, e^{-A(t_0)} = y_0$, cioè

porre: $c = y_0 e^{A(t_0)} - G(t_0)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \Big(y_0 e^{A(t_0)} + \underbrace{G(t) - G(t_0)}_{\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\, ds} \Big) e^{-A(t)}$$

scegliendo $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$)

si perviene alla formula

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\, ds \right) e^{-A(t)}$$

in cui la soluzione particolare è vista come somma della soluzione dell'omogenea associata che passa per (t_0, y_0) e di una soluzione particolare passante per $(t_0, 0)$.

Es. $a(t) = a$ costante > 0 : $y'(t) + a\, y(t) = f(t)$

Sol. omog. associata : $y(t) = c\, e^{-at}$

Integrale generale : $y(t) = (c + \int f(t) e^{at} dt)\, e^{-at}$

Sol. del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \left(\int_0^t f(s) e^{as} ds \right) e^{-at}$$

$$= y_0 e^{-at} + \boxed{\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds} \longrightarrow \text{REGIME PERMANENTE}$$

esplicitazione

$$y' = -a(t)\, y + f(t)$$

$a(t)$ continua in un intervallo I

$f(t)$ pure.

(6)

$\Longrightarrow$ valgono le ipotesi del teor di Cauchy per ogni punto $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$

Cioè esiste una e una sola funzione $\bar{y}(t)$ tale che

$$\bar{y}'(t) + a(t)\, \bar{y}(t) = f(t)$$

e

$$\bar{y}(t_0) = y_0$$

Se l'integr. generale è

$$(*) \qquad y = (c + G(t))\, e^{-A(t)}$$

$$y_0 = (c + G(t_0))\, e^{-A(t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad c = y_0 e^{A(t_0)} - G(t_0)$$

Sostituisco in $(*)$

$$y = \left(y_0 e^{A(t_0)} - G(t_0) + G(t_0) \right) e^{-A(t)}$$

Scelgo la primitiva $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

Rappresento la differenza $G(t) - G(t_0)$ come

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\, e^{A(s)}\, ds$$

Quindi la soluzione del probl. di Cauchy è

$$\bar{y}(t) = y_0 e^{-A(t)} - \left[\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)} ds \right] e^{-A(t)}$$

ESEMPIO FACILE

(*) $y' + 5y = 0$

$y' = -5y \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int -5\,dt \quad \Rightarrow \quad |y| = -5t + k$

$\Rightarrow \quad y = \pm e^{-5t+k} \quad \Longrightarrow \quad y = (\pm e^{k})\, e^{-5t}$

$\hookrightarrow \quad y(t) = c\, e^{-5t} \qquad c \in \mathbb{R}$

$y' + 5y = 3t$ eq. diff lineare del I ordine completa che ha (*) come omogenea associata.

Cerco una soluz. particolare con il metodo di variazione delle costante.

Una sol. particolare avrà la forma

$$y = c(t) \cdot e^{-5t}$$

$$\Downarrow \quad y' = c'(t)\, e^{-5t} + c(t)(-5)e^{-5t} =$$

$$= (c'(t) - 5c(t))\, e^{-5t}$$

Sostituisco nell'eq. diff:

$$(c'(t) - 5c(t))\, e^{-5t} + 5 \cdot c(t)\, e^{-5(t)} = 3t$$

$$\Longleftrightarrow \quad c'(t) \cdot e^{-5t} = 3t \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = 3te^{+5t}$$

Calcolo una primitiva di $c'(t)$

$$\int 3te^{+5t}\,dt = \frac{1}{5} \cdot 3te^{5t} - \frac{1}{5}\int 3e^{5t}\,dt = \frac{3}{5}te^{5t} - \frac{3}{25}e^{5t} + c$$

$$G(t) = \frac{3}{5}te^{5t} - \frac{3}{25}e^{5t} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(t) = G(t)e^{-5t} = \boxed{\frac{3}{5}t - \frac{3}{25}}$$

$\Rightarrow$ integrale generale

$$y(t) = ce^{-5t} + \frac{3}{5}t - \frac{3}{25}$$

L'esempio mostra che talora, dopo aver cercato l'integrale particolare col metodo di variazione della costante (e il calcolo di una primitiva "laboriosa"), si trova una soluzione molto semplice.

Vediamo se si può semplificare la ricerca della soluzione particolare almeno in alcuni casi.

Esempi particolari.

Eq. diff. lineari del primo ordine con coefficiente di y COSTANTE e termine noto "elementare"

$$\boxed{y' + ay = ke^{\lambda t}} \qquad a, \lambda, k \text{ costanti reali}$$

Soluz. dell'omogenea $z' + az = 0$:

$$z = c \cdot e^{-at} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Soluz particolare: ne esiste una della forma

$$\bar{y} = \alpha e^{\lambda t} \qquad \alpha \text{ opportuno ?}$$

$\bar{y}' = \alpha\lambda e^{\lambda t}$; sostituisco nell'eq:

$$\alpha\lambda e^{\lambda t} + a\alpha e^{\lambda t} = ke^{\lambda t}$$

$$(\alpha\lambda + a\alpha)\cancel{e^{\lambda t}} = k\cancel{e^{\lambda t}} \quad \Rightarrow \quad (\lambda + a)\alpha = k \quad \Rightarrow$$

equazione in α

Se $\lambda + a \neq 0$ basta scegliere $\alpha = \frac{k}{\lambda + a}$

$\Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{k}{\lambda + a} \cdot e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ integrale generale $y = c e^{\lambda t} + \frac{k}{\lambda + a} e^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$

Se $a = -\lambda$: $\quad y' - \lambda y = k e^{\lambda t}$

non posso procedere come sopra poiché $e^{\lambda t}$ è soluz. della omog. assoc.
Uso il metodo di variaz. delle costanti

$z = c e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \bar{y} = c(t) e^{\lambda t}$

$y' = c'(t) e^{\lambda t} + \lambda c(t) e^{\lambda t}$

sostituisco

$\left(c'(t) + \cancel{\lambda c(t)} - \cancel{\lambda c(t)} \right) \cancel{e^{\lambda t}} = k \cancel{e^{\lambda t}}$

$\boxed{c'(t) = k}$ una primitiva di $c'(t)$ è $G(t) = kt$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = kt \cdot e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ integrale generale

$y(t) = (c + kt) e^{\lambda t}$

$\boxed{y' + ay = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n}$

Sol. omogenea ass. : $z = c e^{-at}$

$\bar{y}(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$

$\bar{y}'(t) = h_1 + 2h_2 t + \dots + n h_n t^{n-1}$

$(h_1 + a h_0) + (2h_2 + a h_1) t + \dots + (n h_n + a b_{n-1}) t^{n-1} + a h_n t^n =$

$= b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$

$$\begin{cases} h_1 + a h_0 = b_0 \\ 2h_2 + a h_1 = b_1 \\ \vdots \\ n h_n + a b_{n-1} = b_{n-1} \\ a h_n = b_n \end{cases}$$

Sistema in $h_0, h_1, \dots h_n$

ha sempre soluzione?

Si può scrivere meglio il sistema: ad es. se $n = 3$

$$\begin{cases} a h_0 + h_1 = b_0 \\ a h_1 + 2h_2 = b_1 \\ a h_2 + 3h_3 = b_2 \\ a h_3 = b_3 \end{cases}$$

Risolubile?

sì perché $a \neq 0$! Parto dall'ultima equazione e risalendo risolvo le altre.

$$\boxed{y' + ay = k\cos bt}$$

la stessa cosa se c'è $k \operatorname{sen} bt$

Omog. assoc. $z = c\,e^{-at}$

$$\bar{y} = \alpha \operatorname{sen} \underline{bt} + \beta \cos \underline{bt}$$

$$\bar{y}' = \alpha b \cos bt - \beta b \operatorname{sen} bt$$

Sostituisco:

$$\alpha b \cos bt - \beta b \operatorname{sen} bt + a\alpha \operatorname{sen} bt + a\beta \cos bt = k\cos bt$$

$$(\alpha b + a\beta)\cos bt + (a\alpha - \beta b)\operatorname{sen} bt = k\cos bt$$

$$(\alpha b + a\beta - k)\cos bt + (a\alpha - \beta b)\operatorname{sen} bt = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

deve valere per $t = 0$ e per $t = \pi/2$

$$\begin{cases} \alpha b + a\beta - k = 0 \\ a\alpha - \beta b = 0 \end{cases}$$

sistema lineare in α e β

$$\begin{cases} b\cdot\alpha + a\cdot\beta = k \\ a\cdot\alpha - b\beta = 0 \end{cases}$$

risolubile se e solo se $-b^2 - a^2 \neq 0$: vero se almeno uno dei due coeff. a, b è $\neq 0$

coefficienti del sistema: $\begin{bmatrix} b & a \\ a & -b \end{bmatrix}$

e questo succede di certo se l'equazione non è $y' = k$

risolvo ....

e sostituisco.

$$y' + 7y = e^{2t} + \cos t \quad ?$$

In generale se

$$y' + ay = f(t) + g(t) \quad ?$$

Posso risolvere

$$y' + ay = f(t) \quad \text{e}$$

$$y' + ay = g(t)$$

e sommare le due sol. particolari $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$

$$\bar{y}_1' + a\bar{y}_1 = f(t)$$

$$\bar{y}_2' + a\bar{y}_2 = g(t)$$

Sommando

$$\bar{y}_1' + \bar{y}_2' + a\bar{y}_1 + a\bar{y}_2 = f(t) + g(t)$$

$$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)' + a(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = f(t) + g(t)$$

Risolvere per esercizio

$$y' + ay = k e^{\lambda t} \cos bt$$