$y' + ay = k e^{\lambda t} \cos bt \qquad (b \neq 0)$

$z' + az = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ Sol omog: $z = c e^{-at}$

Sol. particolare?

$\bar{y} = \alpha e^{\lambda t} \cos bt + \beta e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt \qquad$ con α, β opportuni

$\bar{y}' = \alpha(\lambda e^{\lambda t} \cos bt - b e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt) + \beta(\lambda e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt + b e^{\lambda t} \cos bt)$

$[\alpha \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \cos bt + \beta b \cancel{e^{\lambda t}} \cos bt + \alpha a \cancel{e^{\lambda t}} \cos bt] +$

$+ [-\alpha b \cancel{e^{\lambda t}} \operatorname{sen} bt + \beta \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \operatorname{sen} bt + a\beta \cancel{e^{\lambda t}} \operatorname{sen} bt] = k \cancel{e^{\lambda t}} \cos bt$

$(\alpha\lambda + \beta b + \alpha a - k) \cos bt + (-\alpha b + \beta\lambda + a\beta) \operatorname{sen} bt \equiv 0 \ \forall t$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha(\lambda + a) + \beta b = k \\ \alpha(-b) + \beta(\lambda + a) = 0 \end{cases} \qquad \text{sistema lineare}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + a & b \\ -b & \lambda + a \end{bmatrix} = (\lambda + a)^2 + b^2 \neq 0 \quad \text{sì perché } b \neq 0$$

$\Rightarrow$ le due righe di coeff. non sono proporzionali

$\Rightarrow$ il sistema ha 1 e 1 solo soluzione:

(α, β) con:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} k & b \\ 0 & \lambda + a \end{vmatrix}}{(\lambda + a)^2 + b^2} = \frac{k(\lambda + a)}{(\lambda + a)^2 + b^2}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda + a & k \\ -b & 0 \end{vmatrix}}{(\lambda + a)^2 + b^2} = \frac{kb}{(\lambda + a)^2 + b^2}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

Hanno la forma $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$.

Ogni funzione $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e tale che

$$\forall t \in I: \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0$$

si dice soluzione dell'eq. diff. di 2° ordine.

Si prova che l'integrale generale di un'eq. diff. del 2° ordine è costituito da una FAMIGLIA di funzioni dipendente da 2 parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Questo è il motivo per cui per risolvere il problema di Cauchy dovremo dare 2 condizioni iniziali (VEDI il caso dell'eq. che coinvolge l'accelerazione in cui si danno spostamento e velocità iniziali).

In particolare si dicono EQ. DIFF. LINEARI del 2° ORDINE quelle della forma

(1) $\qquad y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = f(t)$

con $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione diff. completa si ottiene sommando una soluzione particolare di (1) all'integrale generale dell'eq. differ. OMOGENEA ASSOCIATA

(2) $\qquad y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = 0$

Non ci sono però formule generali "belle" come nel caso del 1° ordine.

Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono soluz. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO → $\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

z_1, z_2 sol particolari di

(*) $z'' + a(t) z' + b(t) z = 0$

Allora anche $c_1 z_1 + c_2 z_2$ è soluz. di (*)

Infatti z_1 e z_2 sono soluz. $\iff$

$$z_1'' + a(t) z_1' + b(t) z_1 = 0 \qquad \forall t \in I$$
$$z_2'' + a(t) z_2' + b(t) z_2 = 0$$

$$c_1 z_1'' + c_2 z_2'' + a(t) c_1 z_1' + a(t) c_2 z_2' + c_1 b(t) z_1 + c_2 b(t) z_2 = 0 \qquad \forall t \in I$$

cioè

$$(c_1 z_1 + c_2 z_2)'' + a(t)(c_1 z_1 + c_2 z_2)' + b(t)(c_1 z_1 + c_2 z_2) = 0 \qquad \forall t \in I$$

$\Longrightarrow$ $c_1 z_1 + c_2 z_2$ è soluzione di (*).

Caso particolare: $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI

L'equazione
$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$
ha qualche soluzione della forma e^{rt} (come succede nel caso delle lineari di 1° ordine)?

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = e^{rt} \\ y'(t) = r e^{rt} \\ y''(t) = r^2 e^{rt} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ la $y(t)$ è soluzione se e solo se $(r^2 + ar + b) e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$: equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due radici reali distinte r_1, r_2

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \neq 0$

comunque si scelga t $\Rightarrow$ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1 + r_2)t} - r_1 e^{(r_1 + r_2)t} =$$
$$= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} = 0$$

$\iff r_2 = r_1$ Ma siamo nel caso $\Delta > 0$ e quindi $r_1 \neq r_2$
$\Rightarrow$ Wronskiano $\neq 0$

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \neq 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è
$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

• Se $\Delta = a^2-4b<0$ ci sono due radici complesse coniugate $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$. Allora

$$e^{r_1t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\,\mathrm{sen}\,\beta t) \quad ; \quad e^{r_2t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\,\mathrm{sen}\,\beta t)$$

sono due soluzioni complesse dell'equazione differ. omogenea .... Se le voglio reali basta prendere

$$\frac{1}{2}\left(e^{r_1t}+e^{r_2t}\right)=e^{\alpha t}\cos\beta t \quad e \quad \frac{1}{2i}\left(e^{r_1t}-e^{r_2t}\right)=e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$$

VERIFICA per la prima soluzione:

se $z(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z'(t)=e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\,\mathrm{sen}\,\beta t)$

$z''(t)=e^{\alpha t}(\alpha^2\cos\beta t-\alpha\beta\,\mathrm{sen}\,\beta t-\alpha\beta\,\mathrm{sen}\,\beta t-\beta^2\cos\beta t)$

$$z''(t)+az'(t)+bz(t)=e^{\alpha t}\Big((\underbrace{\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b}_{=0})\cos\beta t-(\underbrace{2\alpha\beta+a\beta}_{=0})\,\mathrm{sen}\,\beta t\Big)=0$$

infatti per ipotesi $(\alpha+i\beta)^2+a(\alpha+i\beta)+b=0$ — cercare la parte reale e quella immag.

Anche qui $\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\,\mathrm{sen}\,\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t+\beta\cos\beta t)\end{vmatrix}=\beta e^{2\alpha t}\neq 0\ \forall t.$ →

Dunque l'integrale generale avrà la forma:

$$c_1e^{\alpha t}\cos\beta t+c_2e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t.$$

Da notare che posso leggere $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ e $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ come coseno e seno di un angolo φ e posto $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ mi riconduco a VEDI PAG 7

$$e^{\alpha t}A\cos(\beta t-\varphi) \qquad A,\varphi \text{ qualsiasi}$$

Ad. es. $y''(t)+k^2y(t)=0$ ha associata l'equazione $r^2+k^2=0$ cioè $r=\pm ki$: dunque l'integrale generale ha la forma $c_1\cos kt+c_2\,\mathrm{sen}\,kt$ o anche

$$A\cos(kt-\varphi)$$

Esempi:

$x^2+1=0 \qquad x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \qquad \alpha=0,\ \beta=1$

$$x^2+x+1=0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{+3}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt3}{2}\cdot i$$

$$\boxed{\alpha=\frac{-1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt3}{2}}$$

Soluzioni dell'eq. diff

$$y''+ay'+by=0$$

con $\Delta=a^2-4b<0$ e soluz $y=\alpha\pm i\beta$ con $\beta\neq0$ poiché $\Delta<0$

$y_1=e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad y_2=e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$

$\alpha=-\frac{a}{2} \qquad \beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

Sono soluz indipendenti?

$y_1'=\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$

$y_2'=\alpha e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\,\mathrm{sen}\,\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t+\beta\cos\beta t)\end{vmatrix}$$

$$=e^{2\alpha t}\big[\cancel{\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t\cos\beta t}+\beta\cos^2\beta t-\cancel{\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t\cos\beta t}+\beta\,\mathrm{sen}^2\beta t\big]=\beta e^{2\alpha t}\overset{?}{=}0$$

MAI

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt =$$

$\uparrow$ cos ? $\qquad$ $\uparrow$ −sen ?

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos kt + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\operatorname{sen} kt\right)$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\varphi \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \operatorname{sen}\varphi$$

cioè cerco φ che soddisfa contemporaneamente queste due equazioni

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\cos\varphi\cos kt + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} kt\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}_{A}\left(\cos(kt-\varphi)\right)$$

A ampiezza dell'oscillazione

- se $\Delta = a^2-4b=0$ c'è un'unica radice (doppia) per $\boxed{z^2+az+b=0}$ $\quad b=\frac{a^2}{4}$

$r=-a/2$. Allora una soluzione è $e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$.

Per trovare un'altra sol. indipendente da questa:

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI:

Cerco $z(t) = c(t)\,e^{-a/2\,t}$ che sia soluzione:

$$z'(t) = \left(c'(t) - \frac{a}{2}c(t)\right)e^{-a/2\,t}$$

$$z''(t) = \left(c''(t) - \frac{a}{2}c'(t) - \frac{a}{2}c'(t) + \frac{a^2}{4}c(t)\right)e^{-a/2\,t}$$

e quindi sostituendo nell'eq. diff.:

$$\left(\boxed{c''(t) - \cancel{ac'(t)} + \frac{a^2}{4}c(t)} + \cancel{ac'(t)} - \frac{a^2}{2}c(t) + \boxed{\frac{a^2}{4}c(t)}\right)e^{-a/2\,t} = 0$$

cioè

$$c''(t) = 0$$
$$c'(t) = c_1$$
$$c(t) = c_1 t + c_2$$

Quindi una seconda soluzione indipendente(*) da $e^{-a/2\,t}$ è $t\,e^{-a/2\,t}$ e l'integrale generale è

$$(c_1 t + c_2)\,e^{-a/2\,t}$$

(*) (Verifico che anche le due soluzioni $t e^{-a/2\,t}$ e $e^{-a/2\,t}$ sono indipendenti:
$$\begin{vmatrix} t e^{-a/2\,t} & e^{-a/2\,t} \\ (1-a/2\,t)e^{-a/2\,t} & -\frac{a}{2}e^{-a/2\,t} \end{vmatrix} = -e^{-at} \neq 0 \ \forall t)$$

Ricerca delle soluzioni particolari dell'equazione completa

Si può sempre cercare di usare il metodo di variazioni delle costanti. Ma quando $f(t)$ ha una forma che ricorda quella delle possibili soluzioni dell'omogenea:

polinomio ; $e^{\lambda t}$; $e^{\lambda t}\cos\omega t$ oppure $e^{\lambda t}\operatorname{sen}\omega t$

si può far di meglio.

Eq. diff. del 2° ordine lineari a coeff costanti

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = f(t)$$

$f(t)$ continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

a, b costanti

· Per risolverla devo sommare una sol. particolare dell'equazione completa (*) con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$z'' + az' + bz = 0$$

↓ associamo l'eq. caratteristica

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\boxed{3 \text{ CASI:}}$

$\Delta > 0$: 2 sol. reali distinte r_1, r_2 e tutte le sol dell'omogenea hanno la forma

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{C}$ con $\Delta = a^2 - 4b$

$$= \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta} \sqrt{-1} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

$\Delta = 0$: 1 sola sol. reale : $r = -\frac{a}{2}$

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} =$$
$$= e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

Poi passo a esaminare le soluzioni particolari in dipendenza da $f(t)$

Per trovare una sol. della completa la cerco tra funzioni "SIMILI" al termine noto

1) $f(t)$ polinomio di grado n

cerco le soluz. nei polinomi

- di grado n : $\bar{y}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ solo se $b \neq 0$
- di grado $n+1$: se $b = 0$ e $a \neq 0$
- di grado $n+2$: se $b = 0 = a$

in questi due casi: l'eq. diff. ha forma

$y'' + ay' = f(t)$ → sost. $x(t) = y'(t)$, $x'(t) = y''(t)$

$y'' = f(t)$ → calcolo successivamente due primitive

2) $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $f(t) = A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

$\boxed{\omega = 0}$: $A e^{\lambda t}$ $\qquad$ $\boxed{\lambda = 0}$: $A \cos \omega t$ $\qquad$ $\boxed{\lambda = 0}$: $A \operatorname{sen} \omega t$

Vedi pagine successive

3) $f(t)$ = Somma di 2 o più dei casi precedenti

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Cerco una soluzione particolare per le eq. diff.:

$y'' + ay' + by = f_1(t)$: $\bar{y}(t)$

$y'' + ay' + by = f_2(t)$: $\bar{\bar{y}}(t)$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$ è soluzione di $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$? SI

$$(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) + (\bar{\bar{y}}'' + a\bar{\bar{y}}' + b\bar{\bar{y}}) = f_1(t) + f_2(t)$$

ESEMPIO

$$y'' + 3y' = t^2 - 5t + 1$$

$\boxed{\text{caso polinomiale con } b=0}$

$\bar{y} = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

$\bar{y}' = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$

$\bar{y}'' = 6a_3 t + 2a_2$

$$6a_3 t + 2a_2 + 9a_3 t^2 + 6a_2 t + 3a_1 = t^2 - 5t + 1$$

$$(9a_3 - 1)t^2 + (6a_3 + 6a_2 + 5)t + 2a_2 + 3a_1 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 9a_3 - 1 = 0 \\ 6a_3 + 6a_2 + 5 = 0 \\ 2a_2 + 3a_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = 1/9 \\ 6a_2 = -\frac{17}{3} \\ 2 \cdot \frac{-17}{18} + 3a_1 = 1 \end{cases}$$

ecc....

oppure $\quad y' = x(t) \quad y'' = x'(t)$

$x' + 3x = t^2 - 5t + 1$

$x = at^2 + bt + c$

$x' = 2at + b$

$2at + b + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 - 5t + 1$ ... SISTEMA

Risolvere e poi calcolare

$y' = at^2 + bt + c \Rightarrow$

$$y = \boxed{\frac{1}{3}at^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct + k}$$

$\boxed{f(t) = A e^{\lambda t}}$

$\bar{y}(t) = c(t) e^{\lambda t} \Rightarrow \quad \bar{y}' = (c'(t) + \lambda c(t)) e^{\lambda t}$

$\bar{y}'' = (c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t)) e^{\lambda t}$

$$\cancel{e^{\lambda t}}\left[(c'' + 2\lambda c' + \lambda^2 c) + a(c' + \lambda c) + bc\right] = A\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$c'' + c'(2\lambda + a) + (\lambda^2 + a\lambda + b)c = A$$

ove c, c', c'' dipendono da t

Se: $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ cioè λ non è soluz. dell'eq caratt. della omog. associata

prendo come $c(t) = \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$

$\Rightarrow c'(t) = 0, \; c''(t) = 0$

e sostituendo ho un'identità

$\Rightarrow \bar{y}(t) = \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} e^{\lambda t}$

Se: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$

$c'' + c'(2\lambda + a) = A$

se $c' = \dfrac{A}{2\lambda + a} \qquad (\Rightarrow c'' = 0)$

l'eq. è soddisfatta $\Rightarrow c(t) = \dfrac{A}{2\lambda + a} t \; (+\underbrace{c_1}_{=0})$

$\bar{y}(t) = \dfrac{At}{2\lambda + a} e^{\lambda t}$

Se: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$

$c'' = A \Rightarrow c' = At \Rightarrow c = \dfrac{A}{2} t^2$

$\bar{y}(t) = \dfrac{At^2}{2} e^{\lambda t}$

$$\boxed{f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t \qquad e \ \omega \neq 0}$$

esiste una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t\right) \text{ con } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}?$$

Calcolando $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ e sostituendo si arriva a un sistema di questo tipo

$$\begin{cases} (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b) c_1 + (2\lambda\omega + a\omega) c_2 = A \\ -(2\lambda\omega + a\omega) c_1 + (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b) c_2 = 0 \end{cases}$$

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 \neq -(2\lambda\omega + a\omega)^2$ esiste una e una sola coppia soluzione $(c_1, c_2) \Rightarrow$ il problema è risolto.

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 + (2\lambda\omega + a\omega)^2 = 0$

allora $\begin{cases} \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b = 0 \\ \omega(2\lambda + a) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\omega \neq 0} \begin{cases} \omega^2 = \lambda^2 + a\lambda + b \\ 2\lambda + a = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \omega^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{-a^2}{2} + b = \dfrac{4b - a^2}{4} = -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases}$$

Ricordare: Δ è il discriminante di $z^2 + az + b = 0$

In questo caso non bastano i coeff. costanti

Ma si prova che una soluz. particolare ha la forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = k \cdot t \cdot e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t} \qquad k = \frac{A}{2\omega}$$

Cerchiamo le soluzioni particolari di

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = A \cos \omega t}$$

tra quelle della forma $\bar{y}(t) = \lambda t \sin \omega t$.

Si ha $\bar{y}'(t) = \lambda \sin \omega t + \lambda \omega t \cos \omega t$

$\bar{y}''(t) = 2\lambda\omega \cos \omega t - \lambda\omega^2 t \sin \omega t$

Sostituendo nell'equazione:

$$2\lambda\omega \cos \omega t - \cancel{\lambda\omega^2 t \sin \omega t} + \cancel{\lambda \omega^2 t \sin \omega t} = A \cos \omega t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$2\lambda\omega = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{A}{2\omega}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{2\omega} t \sin \omega t + k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t.}$$

Analogamente se l'equazione ha la forma

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = A \sin \omega t}$$

Cerchiamo le soluzioni tra quelle della forma $\bar{y}(t) = \lambda t \cos \omega t$

Allora: $\bar{y}'(t) = \lambda \cos \omega t - \lambda \omega t \sin \omega t$

$\bar{y}''(t) = -2\lambda\omega \sin \omega t - \lambda\omega^2 t \cos \omega t$

Sostituendo nell'equazione:

$$-2\lambda\omega \sin \omega t - \lambda\omega^2 t \cos \omega t + \lambda\omega^2 t \cos \omega t = A \sin \omega t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\lambda = -A/2\omega$

Quindi l'integrale generale ha la forma

$$\boxed{y(t) = -\frac{A}{2\omega} t \cos \omega t + k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t}$$