$y' + ty - t = 0 \implies y' + ty = t$

Classificazione: eq. diff. di 1° ordine lineare completa con termine noto

$f(t) = t \mapsto$ continue su $\mathbb{R}$

e coeff. $a(t) = t$

Dovrei risolvere l'omog. associata

$$z'' + tz = 0$$

e cercare una sol. part. col metodo di variazione delle costanti

In pratica riscrivo:

$$y' + t(y-1) = 0$$

prendo come funzione incognita

$$w = y - 1$$
$$w' = y'$$

$$\implies \quad w' + tw = 0$$

questa è lineare del 1° ordine omogenea.

$$w' = -tw$$

- $w = 0$ sol. particolare

$$\int \frac{w'}{w}\,dt = -\int t\,dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln|w| = -\frac{t^2}{2} + c \iff |w| = e^c \cdot e^{-t^2/2} \iff$$

$$\iff w = \pm e^c\, e^{-t^2/2} \iff w = k\, e^{-t^2/2} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\implies y = 1 + k e^{-t^2/2}$$

$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Riconosco: Condizioni di Cauchy applicate a una eq. diff. del 1° ordine a variabili separabili NON LINEARE

Soluz. della eq. diff. $\quad y' = -2ty^2$

$a(t) = 2t \qquad b(y) = -y^2$

continue entrambe su $\mathbb{R} \implies$

$\implies$ le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$ e $\exists$ 1 e 1 sola soluz per ciascun probl. di Cauchy.

Soluz. particolari $(b(y) = 0)$: $\; y = 0$

Se la richiesta del probl. di Cauchy fosse $y(0) = 0$ avrei già trovato la sol.

Ma $y = 0$ non risolve il nostro P.C. $\implies$

$$\int -\frac{y'\,dt}{y^2} = \int 2t\,dt \iff \int \frac{-dy}{y^2} = \int 2t\,dt$$

integr. generale

$$\frac{1}{y} = t^2 + c \iff y(t) = \frac{1}{t^2 + c} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$ se $y(0) = 1$

Sol. del probl. di C.

$$\frac{1}{1} = 0^2 + c \implies c = 1 \implies y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$y''+3y'+2y = 2\,\mathrm{sen}\,4t$$

RICORDARE: nell'equazione $y''+ay'+by = Ae^{\lambda t}\cos\omega t$ si ha caso critico solo se
$$\begin{cases}\lambda=-a/2\\ \omega^2=-\Delta/4\end{cases}$$

Eq. diff 2° ordine lineare completa a coeff. costanti

OMOGENEA ASSOCIATA $z''+3z'+2z=0$

↓

EQUAZIONE CARATTERISTICA $r^2+3r+2=0$

ha soluzioni $r_1=-1 \quad r_2=-2$

⇒ Soluzioni dell'omogenea

$$z = c_1 e^{-1\cdot t} + c_2 e^{-2\cdot t} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

CERCO UNA SOLUZ. PARTICOLARE del tipo

$$\bar y = \alpha\,\mathrm{sen}\,4t + \beta\cos 4t$$

$$\bar y' = 4\alpha\cos 4t - 4\beta\,\mathrm{sen}\,4t$$ Sostituisco nell'eq. diff.

$$\bar y'' = -16\alpha\,\mathrm{sen}\,4t - 16\beta\cos 4t$$

$$\underline{-16\alpha\,\mathrm{sen}\,4t} - 16\beta\cos 4t + 12\alpha\cos 4t \underline{- 12\beta\,\mathrm{sen}\,4t} + \underline{2\alpha\,\mathrm{sen}\,4t} + 2\beta\cos 4t = 2\,\mathrm{sen}\,4t \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\mathrm{sen}\,4t\,(-14\alpha-12\beta-2) + \cos 4t\,(-14\beta+12\alpha) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}14\alpha+12\beta+2=0\\ 12\alpha-14\beta=0\end{cases} \iff \begin{cases}7\alpha+6\beta=-1\\ 6\alpha-7\beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{7}{6}\beta\\ \left(\frac{49}{6}+6\right)\beta=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha=-\frac{7}{85}\\ \beta=-\frac{6}{85}\end{cases}$$

⇒ Integrale generale $y(t) = -\frac{7}{85}\,\mathrm{sen}\,4t - \frac{6}{85}\cos 4t + c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$

$$y''-2y'+y = 2e^t\cos 3t$$

Provare anche con: $y''+3y'-4y = 2e^t\cos 3t$

Eq. diff. lin. 2° ordine compl. coeff. costanti

OMOG. ASSOC.: $y''-2y'+y=0$

eq. caratteristica: $r^2-2r+1=0 \qquad r=1$ 2 coincidenti

- sol. omog. associata $\boxed{z = c_1e^{1\cdot t}+c_2\,t\,e^{1\cdot t}}$
- cerco una soluz. della completa tra quelle della forma

$$\boxed{\bar y = e^t(\alpha\cos 3t+\beta\,\mathrm{sen}\,3t)}$$

Verifico se $\lambda\ne -\frac{a}{2}$ o $\omega^2 \ne -\frac{\Delta}{4}$

$-\frac{a}{2} = 1 = \lambda$ ma $3^2 \ne -\frac{1}{4}\cdot 0$

Ok va bene quel tipo di soluzione

$$\bar y' = e^t(\alpha\cos 3t+\beta\,\mathrm{sen}\,3t - 3\alpha\,\mathrm{sen}\,3t+3\beta\cos 3t) = e^t((\alpha+3\beta)\cos 3t + (\beta-3\alpha)\,\mathrm{sen}\,3t)$$

$$\bar y'' = e^t((\alpha+3\beta)\cos 3t + (\beta-3\alpha)\,\mathrm{sen}\,3t - 3(\alpha+3\beta)\,\mathrm{sen}\,3t + 3(\beta-3\alpha)\cos 3t) = e^t(\cos 3t(-8\alpha+6\beta) + \mathrm{sen}\,3t(-8\beta-6\alpha))$$

$$\cancel{e^t}(\cos 3t(-8\alpha+6\beta)+\mathrm{sen}\,3t(-6\alpha-8\beta) - 2\cos 3t(\alpha+3\beta) - 2\,\mathrm{sen}\,3t(\beta-3\alpha) + \alpha\cos 3t+\beta\,\mathrm{sen}\,3t) = 2\cancel{e^t}\cos 3t \iff$$

$$\cos 3t\,(-9\alpha+6\beta-6\beta-2) + \mathrm{sen}\,3t\,(\cancel{-6\alpha}\cancel{+6\alpha}-8\beta-2\beta+\beta)\equiv 0$$

$$\begin{cases}9\alpha=-2\\ -9\beta=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha=-2/9 \quad \beta=0} \Rightarrow$$

⇒ INTGEN: $y(t) = -\frac{2}{9}e^t\cos 3t + c_1e^t + c_2te^t$

$$y''+y = e^t(t^2-1)$$

eq. diff. lineare 2° ordine completa a coeff. costanti — termine noto continuo $\forall t \in \mathbb{R}$

omogenea associata $z''+z=0$

eq. caratteristica $z^2+1=0$ $\qquad r = 0 \pm 1\sqrt{-1}$

Sol. particolari dell'omog. ass. sono

$$z_1(t) = e^{0\cdot t}\cos(1\cdot t) = \cos t$$
$$z_2(t) = e^{0\cdot t}\,\mathrm{sen}(1\cdot t) = \mathrm{sen}\, t$$

$\Rightarrow$ Soluzione dell'omog. assoc. $z(t) = c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}\, t$

Cerco una soluzione particolare del tipo

$$\bar y(t) = e^t(at^2+bt+c)$$
$$\bar y'(t) = e^t(at^2+bt+c+2at+b)$$
$$\bar y''(t) = e^t(at^2+(2a+b)t+b+c+2at+2a+b) = e^t(at^2+(4a+b)t+2a+2b+c)$$

$$\cancel{e^t}\left(at^2+(4a+b)t+2a+2b+c+at^2+bt+c\right) = \cancel{e^t}(t^2-1)$$

$$2at^2+(4a+2b)t+2(a+b+c) = t^2-1$$

$$\begin{cases} 2a=1 \\ 4a+2b=0 \\ 2(a+b+c)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1 \\ 2\left(\frac12-1+c\right)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac12 \\ b=-1 \\ -\frac12+c=-\frac12 \end{cases} \Rightarrow c=0$$

una sol. part. è $\bar y(t) = e^t\left(\frac12 t^2 - t\right)$

INTEGR. GEN. $\quad y(t) = e^t\left(\frac12 t^2 - t\right) + c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}\, t$

$$y''-2y'+y = e^t$$

Ricordare: se in $y''+ay'+b = Ae^{\lambda t}$ λ è soluzione dell'eq. caratt. e tale eq. ha la forma $\left(r-\frac{a}{2}\right)^2=0$ la sol. particolare sarà del tipo.....

Eq. diff. lineare 2° ord. completa a coeff. costanti con termine noto continuo su $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ intervallo di def delle soluz: $\mathbb{R}$)

omogenea associata $z''-2z'+z=0$

eq. caratteristica $(r-1)^2=0$

soluz. dell'omog.: $z(t) = c_1e^t + c_2te^t$

né funzioni del tipo αe^t né del tipo $\alpha t e^t$ possono essere soluz. particolari della completa poiché sono soluz. dell'omog. associata.

Provo con $\bar y = at^2e^t$ (osservando che è inutile aggiungere $+bte^t+ce^t$ in quanto questa è soluz. dell'omog.)

$$\bar y' = a(2t+t^2)e^t$$
$$\bar y'' = a(2+2t+2t+t^2)e^t = a(2+4t+t^2)e^t$$

$$a\cancel{e^t}\left(2+\cancel{4t}+\cancel{t^2}-\cancel{4t}-\cancel{2t^2}+\cancel{t^2}\right) = \cancel{e^t}$$

$$2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac12$$

INTEGR. GEN. $\quad y(t) = \frac12 t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t$

Riprovare con
$y''+9y = t-e^t$

$y''+y'-2y = e^t+t$

eq. diff. del 2° ordine lineare a coeff. costanti con termine noto continuo su $\mathbb{R}$ e somma di 2 funz. elem.

$\Rightarrow$ omog. assoc. $z''+z'-2z=0$

eq. caratt. $r^2+r-2=0$ $\quad r=1\ ,\ r=-2$

Soluz. dell'omog. associata $z=c_1e^t+c_2e^{-2t}$

Cerco una soluz. particolare dell'eq. diff. $y''+y'-2y=t$ (*)

tra quelle della forma $y_1(t)=at+b$

$y_1'=a \quad y_1''=0 \quad \Rightarrow$ sost. nell'eq. (*)

$$0+a-2(at+b)\equiv t \iff (a-2b)+t(-2a-1)\equiv 0$$

$$\iff a=-\tfrac12 \quad b=-\tfrac14$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(t)=-\frac12 t-\frac14}$$

Cerco una sol. part. dell'eq. diff. $y''+y'-2y=e^t$ (**)

tra quelle della forma $y_2(t)=ate^t$

$y_2'=ae^t(t+1)$ $\quad$ Sostituisco nell'eq. (**)

$y_2''=ae^t(t+2)$

$$a\cancel{e^t}(\cancel{t}+2+\cancel{t}+1-\cancel{2t})=\cancel{e^t} \Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac13$$

$\Rightarrow$ sol. part. $\boxed{y_2(t)=\frac13 te^t}$

Quindi una sol part. dell'eq. assegnata è

$$y_1(t)+y_2(t)=-\frac12 t-\frac14+\frac13 te^t$$

INT. GENERALE $\boxed{y(t)=-\frac12 t-\frac14+\frac13 te^t+c_1e^t+c_2e^{-2t}}$

$y''+2y'+3y=3e^{-t}\cos(\sqrt2 t)$

eq. diff. lineare del 2° ord. coeff cost.

omogenea associata $z''+2z'+3z=0$

eq. caratteristica $r^2+2r+3=0$

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-3}=$$
$$=-1\pm\sqrt2\sqrt{-1}$$

Soluzioni dell'omog. associata

$$z(t)=c_1e^{-1t}\cos(\sqrt2 t)+c_2e^{-1t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)=$$
$$=c_1e^{-t}\cos(\sqrt2 t)+c_2e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)$$

Non posso cercare le soluz della completa tra quelle della forma

$$\alpha e^{-t}\cos(\sqrt2 t)+\beta e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)$$

Le trovo tra quelle della forma

$$\bar y(t)=\alpha te^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)$$
$$\bar y'(t)=\alpha\left[e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)-te^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt2 t)+te^{-t}\sqrt2\cos\sqrt2 t\right]$$
$$=\alpha e^{-t}\left[\operatorname{sen}(\sqrt2 t)-t\operatorname{sen}(\sqrt2 t)+t\sqrt2\cos\sqrt2 t\right]$$
$$\bar y''(t)=\alpha e^{-t}\left[-\operatorname{sen}(\sqrt2 t)+t\operatorname{sen}(\sqrt2 t)-\sqrt2 t\cos\sqrt2 t+\sqrt2\cos(\sqrt2 t)-\operatorname{sen}(\sqrt2 t)-\sqrt2 t\cos(\sqrt2 t)+\sqrt2\cos(\sqrt2 t)-2t\cos\sqrt2 t\right]$$

Sostituire e ricavare il valore di α

ecc. ecc.

Per le vacanze: Riconoscere le seguenti eq. diff. e risolverle... senza usare formule (RIFARE i PASSAGGI USATI PER LE DIMOSTRAZIONI Vedi lezioni dell' 11, 17, 18 dicembre ed esercizi del 14 dicembre) NEL CASO DI PROBLEMI DI CAUCHY, trovare l'intervallo MAX di definizione.

1) $y'' + 2y' + 3y = 2t^2 - 1$

2) $y'' + y = \cos 3t$

3) $\begin{cases} y' + 3ty = t^3 \\ y(0) = 7/9 \end{cases}$

3 bis) $\begin{cases} y' + 3t^2 y = t^5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ← FARSI VENIRE QUALCHE IDEA DA 3 per sveltire i conti

4) $\begin{cases} y' - (2t+1)y - 2te^t = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' + y^2 + 1 = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y' + (t-2)y = e^{-t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y' = (2t-1)y^3 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y' = \frac{t}{t^2+1} y + t \\ y(1) = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y' + \tan(t)\, y = 2 \operatorname{sen} t \\ y(\pi) = -3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y' + \sqrt{t}\, y = 3\sqrt{t} \\ y(4) = 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} e^{t+y} y' + t = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

12) $y'' + 3y' + 2y = t^2 + 2t$

Buon Natale!

Buon inizio 2013!

ci rivediamo l'11/01/13