Sistemi lineari =

Premessa: voglio studiare i sist. lineari [redacted] 1

Sistemi di EQUAZIONI algebriche di 1° grado.

Numero di equazioni : m
" " incognite : n
} non è detto che coincidano

Convenzione: al primo membro le incognite
" secondo " i "termini noti"

Raffinamento: le incognite in ogni equazione si susseguono nello stesso ordine.

Es: $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases}$

Entrambi sistemi di 2 equazioni in 3 incognite.
Il secondo sarà detto

OMOGENEO

poiché i termini noti sono nulli.

- Tutti i sistemi omogenei hanno almeno 1 soluzione(*): $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
- Ma non è detto che sia l'unica. Nell'esempio:
$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} - \sqrt{2})t \\ y = t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ al variare di t in $\mathbb{R}$ sono tutte soluzioni.

Geometricamente:

E nel primo esempio?

(*) ATTENZIONE: le soluzioni di un sistema in n incognite sono n-uple ordinate soddisfacenti tutte le equazioni del sistema.

2

$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

posso rappresentarlo diversamente?

I →

$\begin{cases} (6, -3, 2) \cdot (x, y, z) = 4 \\ (2, -1, 1) \cdot (x, y, z) = 2 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Simbologia SOLO X NOI

MEGLIO

$$\boxed{\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

MANIERA UFFICIALE

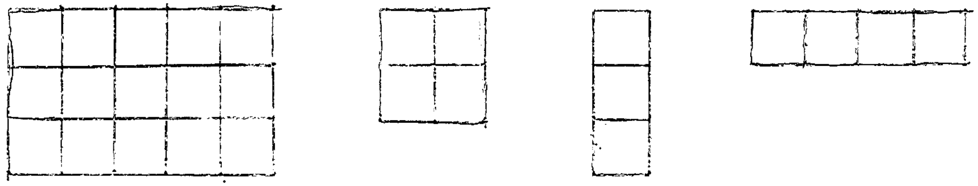
MI SERVIRÀ LA TERMINOLOGIA MATRICIALE

II → ALTRA RILETTURA

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema è risolubile se e solo se il vettore termine noto è comb. lineare degli altri ... 3
(n se le incognite sono n)
cioè il vettore termine noto è DIPENDENTE dagli altri vettori ... SERVONO CRITERI di DIPEND.

MATRICI



Matrice di tipo (m,n) o a m RIGHE (orizzontali) e n COLONNE (verticali)

È un insieme di $\boxed{m \cdot n}$ numeri reali disposti in tabella

MATRICI QUADRATE (n,n) : si dicono in tal caso quadrate di ordine n.
VETTORI RIGA $(1,n)$
VETTORI COLONNA $(m,1)$

Si scriverà
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

A, B di tipo (m,n), o $m \times n$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1,\dots,m,\ \forall j = 1,\dots,n$$

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad tA = (t a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Spazio vettoriale delle matrici (m,n)

Il prodotto tra matrici non si fa COMPONENTE PER COMPONENTE bensì RIGHE PER COLONNE (vedi pag 2 RAPPRESENT. Ⓘ)

$$(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

ATTENZIONE: è un prodotto scalare

In generale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m,n} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1h} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nh} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{n,p} = \underbrace{\begin{array}{c|c} & \text{colonna } h \\ \hline \text{RIGA } k & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jh} \end{array}}_{m,p}$$

elem. di posto (k,h)

MATR. QUADRATE

Le matrici devono essere conformabili perché si possa fare il prodotto.

$A = (1, -1, 0)$
$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$ $AB =$
$BA =$

Vedi pag 5

Come sono AB e BA?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$ $AB =$
$BA =$

vedi pag 5

Come sono AB e BA?

Comunque: prodotto associativo e distributivo

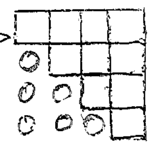
A di tipo (m,n), B (n,p), C (p,q) $\implies (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

A, B di tipo (m,n), C (n,p) $\implies (A+B) \cdot C = AC + BC$

Matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$: ininfluente nel prodotto (vedi pag 6)

Matrici diagonali (quadrate)

Matrici triangolari (ALTE o BASSE)



Matrici rettangolari ridotte: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Matrici trasposte (vedi pag 9)

5

$A = (1, -1, 0)$ (1×3)

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3×1)

$\underset{(1\times 3)\cdot(3\times 1)}{A\cdot B} = (1,-1,0)\cdot(3,2,1) = (3-2+0) = \underset{(1\times 1)}{(1)}$

$$\underset{(3\times 1)\cdot(1\times 3)}{B\cdot A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,0) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & -1\cdot 3 & 3\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & -1\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & -1\cdot 1 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underset{(1\times 1)}{A\cdot B} \neq \underset{(n\times n)}{BA}$ Hanno ORDINE diverso!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2 \\ 3\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 0\cdot 1+2\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$

Hanno lo stesso ordine (2) ma elementi diversi

6

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & 5\cdot 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$A\cdot I_3 = A$

$I_2\cdot A = A$: La matrice identica è ininfluente nel prodotto!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ $\underset{(n\times n)}{I}$ unità

Tutte le matrici $\neq \underline{0}$ saranno dotate di inversa? Cioè $\forall A \neq \underline{0}$ esiste $\underset{(n\times n)}{X}$ tale che $AX = I$?

ESEMPIO (in negativo!)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$AX = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ MAI

Le matrici quadrate non nulle NON sono tutte invertibili.

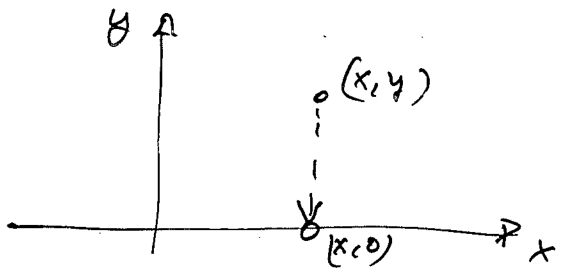
Necessità di <u>criteri di invertibilità</u>

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

così rappresenta una trasformazione nel piano

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x'=x\\y'=0\end{cases}$$



la non invertibilità è legata al fatto che nella proiezione ortogonale si perde l'indicazione dell'ordinata del punto di partenza e quindi non si può tornare indietro

$\boxed{\text{Interpretazione geometrica della non invertibilità di una matrice quadrata (quella di pag 6)}}$

Invece $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ è invertibile (verificarlo) e la corrispondente trasformazione $\begin{cases}x'=x\\y'=2y\end{cases}$ ... pure: $\begin{cases}x=x'\\y=\frac{1}{2}y'\end{cases}$.

DETERMINANTE di una matrice QUADRATA

(Se la matrice NON è quadrata, NON c'è determinante)

Connessioni:

- PROBLEMA DELL'INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE
- RANGO DI UNA MATRICE (m,n)
- RISOLUBILITÀ DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- INDIPENDENZA DI UN INSIEME DI VETTORI
- CALCOLO AUTOVALORI DI UNA MATRICE QUADR.

Ne diamo una definizione ricorsiva basata su qualche esperienza precedente.

Quando è indipendente l'insieme di

- 1 vettore di $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$: $\underline{u}=(a_{11})$
- 2 vettori di $\mathbb{R}^2$: $\underline{u}=(a_{11},a_{12})$; $\underline{v}=(a_{21},a_{22})$
- 3 vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{u}=(a_{11},a_{12},a_{13})$, $\underline{v}=(a_{21},a_{22},a_{23})$, $\underline{w}=(a_{31},a_{32},a_{33})$?

Risposte:

- $\underline{u}\neq\underline{0} \Rightarrow a_{11}\neq 0$
- $\underline{u}\neq t\underline{v}$ e $\underline{v}\neq\underline{0} \Rightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$
- $\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w})\neq 0 \Rightarrow a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Trasposta di A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

DETERMINANTI che sappiamo già calcolare

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Estendendo per "analogia" si potrebbe arrivare a

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}.$$

OPPURE

Chiamo determinante delle matrici

$$(a_{11}) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

"il numero che risulta .... determinante per stabilire se i vettori riga che compaiono in queste matrici sono indipendenti". Cioè

DEFINIZIONE. Sia $A = (a_{ij})$ quadrata di ordine n. Il determinante di A è un numero reale così definito:

- se $n=1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$
- se $n=2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Più in generale, supposto di aver definito il determinante di matrici di ordine $n-1$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} + \dots (-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1}$$

qui si sceglie di lavorare per colonne invece che per riga come fatto prima ma è la stessa cosa: TEOR di LAPLACE

ove M_{i1} è il determinante della matrice che si ottiene da A togliendo la 1ª colonna e la i-esima riga.

TERMINOLOGIA: M_{i1} MINORE COMPLEMENTARE di a_{i1}

$A_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1}$: COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{i1}

La terminologia si estende a M_{ij}, A_{ij}

Vale il

TEOREMA di LAPLACE. Comunque si scelga $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$$ CALCOLO PER COLONNE

$$= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}$$ CALCOLO PER RIGHE

Es. 1) $\det \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ vedi pag 13

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ vedi pag 13

PROPRIETÀ (PER COLONNE: rileggerle poi per RIGHE)

1) Se in A c'è una colonna di zeri: $\det A = 0$

2) Se A' è ottenuta da A scambiando due colonne

$$\det A' = -\det A$$

Es: $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$ ... cambiano solo i segni davanti ai minori!!

- Conseguenza: se in A 2 colonne sono $=$: $\det A' = \det A = 0$ poiché $\det A' = -\det A$ ma $A = A'$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

Sviluppo lungo la 1ª riga:

$$= 8 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot (12+0) - 2(16-30) - 1(0+18) =$$

$$= 96 + 28 - 18 = 106$$

Sviluppo lungo la 2ª colonna

$$(-1)^{1+2} 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 3 \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$= -2(16-30) + 3(32-6) = 28 + 3 \cdot 26 = 106 \qquad (3 \cdot 26 = 78)$$

Nel calcolo del determinante scelgo di usare per lo sviluppo la riga/colonna che contiene più zeri

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(\dots) + (-1)^{3+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(\dots) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot(-1) \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)\cdot 4\cdot 2$$

Il det. di una matrice triangolare (e in particolare diagonale) è il prodotto degli elem. lungo la diagonale

3) Moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ una colonna di A si ha una matrice A' con: $\det A' = \lambda \det A$.

- Conseguenza (1): $\det(\lambda A) = \lambda^n |A|$
- Conseguenza (2): se A contiene colonne proporzionali, $\det A = 0$

4) Aggiungendo a una colonna una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia

in particolare se una colonna è comb. lin. delle altre il det. vale ZERO

Es. Ricalcolare

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

oppure, grazie alla MULTILINEARITÀ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10-10 & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

IDEM sull'es. di pag. 13

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1-1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

proporzionali