$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1+1 & 2+2 & 1+2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$ per le multilinearità

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Uso delle ultime proprietà viste la volta precedente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ (2-3) & (0+15) & (-2+3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & 1 \end{vmatrix} =$$ ho costruito l'ultima riga come 2 I riga + 3 II riga

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 15 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$
$$\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0$$

Se una riga è comb. lineare di 2 o più altre righe della matrice il det. è nullo.

5) TEOREMA DI BINET: A, B quadrate di ordine $n \Rightarrow$
$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$$

6) $\det A^T = \det A$

Rileggere PRODOTTO VETTORIALE e MISTO in termini di DETERMINANTI 3x3.

MATRICI INVERSE

B è detta <u>inversa di</u> A se: $AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Si denota l'inversa di A con A^{-1} e si dice che A è INVERTIBILE.

Se esiste A^{-1} : $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ ed entrambi sono NON NULLI.

VICEVERSA:

se $\det A \neq 0$ esiste A^{-1} e si calcola come

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}.

Infatti:

$AA^{-1} = I \implies$ BINET

$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1 \implies$

$\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Quindi se A è invertibile $\det A \neq 0$

V17

Es. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$

la sua inversa è $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

In particolare $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ che ha

$\det A$: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ ha inversa

A^{-1} : $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ... come visto geometricamente

Se avete la curiosità di capire "perché" l'inversa è ~~fatta~~ così OSSERVATE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & \boxed{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}} \end{pmatrix}$$

- Le cose RIQUADRATE valgono : $\det A$ (Teor. di Laplace) secondo la 1ª riga / secondo la 2ª riga
- le altre sono nulle perché corrispondono a trovare il determinante di una matrice con una riga ripetuta: talora questo si chiama 2° TEOR. di LAPLACE.
- Lo stesso discorso vale anche se prendo una matrice (n,n), con $n > 2$.

Es (sul testo errato)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha} \\ -\operatorname{sen}\alpha \quad \cos\alpha \end{pmatrix}$$

È invertibile? $\det A = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \neq 0$

SI

La sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cos\alpha & (-1)^{2+1}\operatorname{sen}\alpha \\ (-1)^{1+2}(-\operatorname{sen}\alpha) & (-1)^{2+2}\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \operatorname{sen}(-\alpha) \\ -\operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} & 3 \\ 0 \quad -1 & 3 \\ \boxed{0 \quad 0} & 2 \end{pmatrix}$$

è invertibile? $\det A = 1 \cdot (-1) 2 = -2 \neq 0$

SI

A^c = matrice dei complementi algebrici $= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^c)^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(A^c)^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari =

Sistemi di EQUAZIONI algebriche di 1° grado.

Numero di equazioni : m
" " incognite : n
non è detto che coincidano

Convenzione: al primo membro le incognite
" secondo " i "termini noti"

Raffinamento: le incognite in ogni equazione si susseguono nello stesso ordine.

Es: $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases}$

Entrambi sistemi di 2 equazioni in 3 incognite.
Il secondo sarà detto

OMOGENEO

poiché i termini noti sono nulli.

- Tutti i sistemi omogenei hanno almeno 1 soluzione(*): $(x,y,z) = (0,0,0)$
- Ma non è detto che sia l'unica. Nell'esempio:

$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} - \sqrt{2})t \\ y = t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ al variare di t in $\mathbb{R}$ sono tutte soluzioni.

Geometricamente:

E nel primo esempio?

(*) ATTENZIONE: le soluzioni di un sistema in n incognite sono n-uple ordinate soddisfacenti tutte le equazioni del sistema.

In un sistema lineare le cose importanti sono:
- i coefficienti delle incognite
- i termini noti.

Le incognite sono dei "SEGNAPOSTO" così come le equazioni.

Riarrangio gli elementi del sistema in una matrice così:

$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

6	-3	2
2	-1	1

MATRICE DEI COEFFICIENTI del sistema

6	-3	2	4
2	-1	1	2

MATRICE ORLATA CON I TERMINI NOTI

In particolare si può rileggere il sistema di equazioni come un'unica equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{SIMBOLOGIA } A\underline{x} = \underline{b}}$

Colonna delle incognite — Colonna dei termini noti

E' in vista di questa rappresentazione che abbiamo scritto le convenzioni iniziali!

D'altra parte questa rappresentazione rende più evidente perché penso alle soluzioni del sistema come n-uple ordinate.

Per i sistemi (così come per le singole equazioni) possono presentarsi 3 casi

1. non esistono soluzioni. ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
   SISTEMA IMPOSSIBILE

RISOLUBILI
2. esistono soluzioni, ma sono infinite ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = 4/3 \end{cases}$
   SISTEMA INDETERMINATO
3. esiste 1 e 1 sola soluzione ES $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
   SISTEMA DETERMINATO

Sistemi lineari di n equazioni in n-incognite

Matrice dei coefficienti: quadrata. La chiamo A:

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema "come se" fosse un'equazione del tipo $ax=b$: se $a\neq 0$, $x=a^{-1}b$.

Nel caso delle matrici A^{-1} c'è se $\det A\neq 0$.

Dunque:

se $\det A\neq 0$ il sistema ammette 1 e 1 sola soluzione

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

METODO DI CRAMER

se $\det A=0$ può darsi che il sistema sia indeterminato oppure che sia impossibile. VEDI POI.

Tornando al caso $\det A\neq 0$ … concretamente?

Guardo come vanno le cose per $n=2$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2\\A_{12}b_1+A_{22}b_2\end{pmatrix}$$

determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo alla 1ª colonna $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

analogo sulla 2ª colonna

$$\Rightarrow x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\det A}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\det A}$$

Discorso che si generalizza a n qualunque

ES. Risolvere

$$\begin{cases}2x-y+3z=1\\4x+y+z=0\\2x+2y-3z=1\end{cases}\Longrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{con } A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&1&1\\2&2&-3\end{pmatrix}$$

MATR. dei COEFF.

2ª riga − 2 volte la 1ª

$$\det A=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&1&1\\2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-5\\0&3&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-5\\3&-6\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot(-1)=-6\neq 0$$

3ª riga − 1ª riga

$$\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&1&1\\1&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&1&1\\0&3&-6\end{vmatrix}=1\cdot(-6-3)=-9\qquad\Rightarrow x=\frac{-9}{-6}=\frac{3}{2}$$

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\4&0&1\\2&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&0&1\\0&0&-6\end{vmatrix}=-6(-4)=24\qquad\Rightarrow y=\frac{24}{-6}=-4$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&1&0\\0&3&0\end{vmatrix}=-3(-4)=12\qquad\Rightarrow z=\frac{12}{-6}=-2$$

$\Longrightarrow$ la soluz. è $\left(\frac{3}{2},-4,-2\right)$

Sostituisco nel sistema per verificare la correttezza della sol.

Notare che per sistemi $n\times n$ OMOGENEI:

se $\det A\neq 0$ c'è la sola soluzione $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

se $\det A=0$ ci sono infinite soluzioni

→ MEMORIZZARE PER DISCORSI SU AUTOVALORI

ATTENZIONE. Nulla vieta di risolvere un sistema $n\times n$ (con det. della matrice dei coefficienti $\neq 0$) usando invece di questo METODO (detto di CRAMER) un metodo di SOSTITUZIONE o meglio di ELIMINAZIONE (più sistematico): questo sarà oggetto di lezione a CALCOLO NUMERICO.

Qui abbiamo solo stabilito che la soluzione esiste ed è unica

Rango di una matrice

Fondamentale per stabilire se un sistema è o no risolubile.

Il rango di A è il massimo numero di vettori riga (o colonna: è lo stesso) linearmente indipendenti che stanno in A.

... non è la definizione ufficiale del testo ma serve a non fare conti inutili.

ES. rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$

Se non si vede a occhio ... diamo questa definizione (equivalente):

rango di A è il più grande intero r $(\leq \min(m,n))$ tale che esista in A una sottomatrice quadrata di ordine r con determinante $\neq 0$.

ES. Se A è quadrata e $\det A \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché ...

ES. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

È scomodo.

Per abbreviare, usare la seguente condizione sufficiente

$\operatorname{rg} A = r$ se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine r con determinante $\neq 0$
e tutte le sottomatrici di ordine $r+1$ che si ottengono orlando tale matrice .... hanno determinante nullo. (KRONECKER)

Nel caso precedente $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0$

ESERCIZIO.

Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 7 & 2k & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & k & k+1 \\ 2k & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$ al variare del numero reale k

Sol: $\operatorname{rg} A = 3 \quad \forall k \neq 2$
$\operatorname{rg} A = 2 \quad$ per $k = 2$. Vedi pag. successiva

$$\begin{pmatrix} 7 & 2k & 8 & 9 \\ 1 & -2 & k & k+1 \\ 2k & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A_k \qquad Rg\, A_k ?$$

A_k è di tipo $(3,4)$ $\Rightarrow$ $rg\, A_k \leq 3$

$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 48-45 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\, A_k \geq 2$

KRONECKER: orlo con la seconda riga e seconda colonna

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2k & 8 & 9 \\ -2 & k & k+1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}}_{B} = 1 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ k & k+1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2k & 9 \\ -2 & k+1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2k & 8 \\ -2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= 8k + 8 - 9k - 5(2k^2 + 2k + 18) + +6(2k^2 + 16) =$$

$$= 2k^2 - 11k - 90 + 96 + 8 = 2k^2 - 11k + 14 \overset{?}{=} 0$$

$$k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 8 \cdot 14}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4} = \begin{cases} 7/2 \\ 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se $k \neq 2$ e $k \neq \frac{7}{2}$ la matrice B ha det $\neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$

Considero la matrice C ottenuta orlando con l'altra colonna:

sottraggo la 2^a colonna dalla 3^a; sottraggo la 1^a riga dalla 2^a e dalla 3^a

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & k & k+1 \\ 2k & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 2k & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -6 & k-8 & 0 \\ 2k-7 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 2k^2 + 23k - 56 = -2k^2 + 23k - 38$$

Per $k = \frac{7}{2}$ vale $-\frac{49}{2} + \frac{161}{2} - 38 = \frac{112}{2} - 38 \neq 0 \Rightarrow \det C_{7/2} \neq 0 \Rightarrow Rg\, A_{7/2} = 3$

Per $k = 2$ vale $-8 + 46 - 38 = 0 \Rightarrow \det C_2 = 0 = \det B \Rightarrow Rg\, A_2 = 2$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|\underline{b})$

Es.

$$\begin{cases} x + w = k \\ y + z = k-1 \\ x + z = 2k-1 \\ y + w = k-3 \end{cases}$$

è risolubile se ... ... e in tal caso le soluzioni sono ......

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2k-1 \\ k-3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \Rightarrow \text{NO CRAMER}$$

A'

$rg\, A ? = 3$ poiché $|A'| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$rg(A|b)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & k-3 \end{pmatrix}$$

Senz'altro $rg(A|b) \geq 3$

se è 3 il sist. è risolub.
se è 4 no.

$|A| = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} = 0$ per quali valori di k?

Per calcolare il determinante sottraggo la 1^a alla 3^a e la 2^a alla 4^a riga

$$\| \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 3$$

$\Rightarrow$ il sist. è risolubile per $k = 3$

Sia $k=3$

Per determinare le soluzioni osservo che se $\det A' \neq 0$ le prime 3 righe di $(A|\underline{b})$ sono indipendenti (il rango della matrice da esse formato è 3); dato che le 4 righe di $(A|\underline{b})$ sono dipendenti (infatti $rg(A|b)=3$) ...

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

l'ultima riga è comb. lin. delle altre. $\Longrightarrow$

Risolvo il sistema ottenuto togliendo l'ultima equazione

$$\begin{cases} x + w = 3 \\ y + z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

prendo w come parametro:

$$\begin{cases} x = 3 - w \\ y + z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

usare CRAMER oppure il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - 5 + (3 - t) \\ z = 5 - (3 - t) \\ w = t \end{cases}$$

le soluzioni dipendono dal parametro t

In generale, se $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile e le incognite sono n e $rg A = rg(A|b) = r$, le soluzioni dipendono da $n-r$ parametri come si motiva qui a fianco

Dunque, una volta stabilito che il sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

è risolubile, per la soluzione procedo così:

- isolo la sottomatrice A'' di A che ha rango massimo
  quella che ho trovato per garantire: $rg A = rg(A|\underline{b}) =$

  tutte le altre righe di $(A|\underline{b})$ dipendono linearm. dalle righe di $(A|\underline{b})$ che contengono questa sottomatrice quindi le corrispondenti equazioni nel sistema risultano INUTILI per la soluzione e di conseguenza

- elimino tali $n-r$ equazioni.
  Così ho un sistema $A'\underline{x} = \underline{b}$ di r equazioni in n incognite, avente rango massimo.

- prendo come vere incognite quelle corrispondenti alle colonne di A'', mentre uso le altre come parametri e conseguentemente porto questi $n-r$ parametri (con relativi coefficienti) al 2° membro: avrò una colonna di termini noti dipendente dai parametri

- Risolvo il sistema di r equazioni in r incognite risultante, ad es. col metodo di Cramer: se queste incognite si chiamano $x_1, \dots, x_r$, le soluzioni sono del tipo

  $x_1 = f_1(k_{r+1}, \dots, k_n), \dots, x_r = f_r(k_{r+1}, \dots, k_n), x_{r+1} = k_{r+1}, \dots, x_n =$

  con $k_{r+1}, \dots, k_n$ variabili comunque in $\mathbb{R}$ e $f_1, \dots, f_r$ funzioni razionali fratte in $k_{r+1}, \dots, k_n$

  $\Rightarrow \infty^{n-r}$ SOLUZIONI