(1)

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+y+2z=6 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il <u>metodo di eliminazione</u> di Gauss-Jordan

"eliminare" via via le varie incognite:

- ordino le incognite in modo comodo (?) x,y,z
- al primo passo "elimino la x" dalle 2 equazioni in posiz. 2, 3
- al secondo elimino la y dalla 3ª equazione
  ottengo equaz. in z → risolvo
- procedo per sostituz. nelle altre 2 eq.
  dalla 2ª ricavo y
  " 1ª " x

Lo faccio però sulla matrice completa del sistema (e non sulle equazioni)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{sottraggo 3 volte la 1ª riga dalla 2ª e 2 " " " dalla 3ª}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3-3 & 1-6 & 2+3 & 6-0 \\ 2-2 & 3-4 & -1+2 & 1-0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

scambio la 2ª e la 3ª riga (scambio di posto le eq.) e moltiplico la terza per -1

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{sommo 5 volte la 2ª riga alla 3ª}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2)

ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=-1 \\ 0=1 \end{cases}$$ non risolubile

Invece nel MatAss:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+y+2z=5 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

$$\ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=-1 \\ 0=0 \quad \text{identità} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t-2(t-1) \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$$

Oppure sottraggo 2 volte la 2ª riga alla prima

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+t=2 \\ y-t=-1 \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3t = 1 \\ -x + y + 5z + t = 2 \\ 3x - y - 12z + t = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -12 & 1 & 0 \end{array}\right) \longmapsto$$

2ª riga + 1ª riga
3ª riga − 3 volte 1ª riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -3 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

3ª riga + 2 volte 2ª riga

sist. impossibile

Il metodo di Gauss è piuttosto efficiente per stabilire se un sist. è risolubile qualora i coeff. non contengano parametri.

$$\begin{cases} 2x + 6y + 3z + w = 1 \\ x + 4y + z + 2w = 1 \\ x + 2y + 2z - w = 0 \end{cases}$$

sposto la 3ª eq. in 1ª posizione e trovo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

sottraggo 2 volte la 1ª riga alla 2ª e 1 volta la 1ª riga alla 3ª

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

sottraggo la 2ª riga dalla 3ª

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\longmapsto$ divido per 2 la 2ª riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

sottraggo 2 volte la 2ª riga alla prima

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ soluzione
$$\begin{cases} x = -1 - 3s + 4t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Nota: $rg\, A = rg(A|b) = 2$

$n = 4$ incognite

Ricavo soluz. dipendenti da $4 - 2 = 2$ parametri

Si stabilisca se è invertibile la matrice (5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se sì trova A^{-1}; se no, risolvi $A\underline{x} = \underline{0}$

Sol:

sviluppo lungo la 2ª riga

$$\det A = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (1+1) = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists A^{-1}$.

Dovremmo calcolare A^c, $(A^c)^T$, $\dfrac{(A^c)^T}{-2} = A^{-1}$

$AX = I \Rightarrow$ 4 sistemi

$$\begin{cases} A\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ A\underline{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ A\underline{v}' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \\ A\underline{w}' = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

Li possiamo risolvere "in una sola volta" usando il metodo di Gauss.

(6)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(A \mid I) \dashrightarrow (I \mid A^{-1})$$

Tramite GAUSS voglio arrivare a

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

scambio le righe

divido per 2

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \longmapsto$$

sommo la 4ª alla 1ª riga

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

Verificare che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Discutere la risolubilità e risolvere

$$\begin{cases} (k+1)x + ky = 1 \\ -kx + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Rouché Capelli + soluz (Cramer?)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & k & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

il sist. è risolubile se $rg\, A = rg(A|b)$

$rg\, A$? A è quadrata di ord. 3. 1 minore $\neq 0$ calcolo $|A|$.

$$\begin{vmatrix} k+1 & k & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k & 0 \\ -k-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k+1 & k \\ -(k+1) & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k+1)(-1+k) = 0 \iff k = \pm 1$$

$\Rightarrow$ se $k \neq \pm 1$ $rg\, A = 3 \Rightarrow rg(A|b) = 3$
Sistema risolubile in maniera unica ad es. con il metodo di Cramer:

$$(x,y,z) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1}, \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ -k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1}, \frac{\begin{vmatrix} k+1 & k & 1 \\ -k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} \right)$$

Svolgete i conti

e $k = \pm 1$ $\boxed{rg\, A = 2}$ vedi det. della sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A'$

Calcolo il $rg(A|b)$ per $k = \pm 1$
Per calcolarlo orlo la matrice A'. So già che $|A| = 0$
Resta da vedere

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A|b) = 3$ sempre $\forall k$ $\Rightarrow$ sistema non risolubile

Con il metodo di Gauss ristudio:

$$\begin{cases} (k+1)x + ky = 1 \\ -kx + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

per non dover dividere la 1^a riga della matrice $(A|b)$ per $k+1$ (escludendo $k=-1$) porto la 3^a equazione in 1^a posizione

matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k+1 & k & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

sottraggo $(k+1)$ volte la 1^a riga dalla 2^a e sommo k volte la 1^a riga alla 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-(k+1) & -(k+1) & 1-(k+1) \\ 0 & k & k+1 & k+1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -k \\ 0 & k & k+1 & k+1 \end{array}\right) \longmapsto$$

sommo k volte la 2^a riga alla 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -k \\ 0 & 0 & (k+1)(1-k) & (k+1)-k^2 \end{array}\right)$$

se $(k+1)(1-k) \neq 0$ $\quad z = \dfrac{k+1-k^2}{1-k^2}$, $y = \dots$, $x = \dots$ e sostituendo:

se $(k+1)(1-k) = 0$, cioè $k=1$ o $k=-1$

$0 \cdot z = k+1-k^2$
impossibile per $k = \pm 1$ $\Longrightarrow$ Sist. non risolubile

Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$\sqrt{2}+2i-7i^2+\frac{1}{\pi}i^3 \quad \dots$$

$$= \sqrt{2}+7+\left(2-\frac{1}{\pi}\right)i$$

Ma poniamo

$$\boxed{i^2=-1}$$
$$i^3=i\cdot i^2=-i$$
$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1.$$

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se $a+ib=a'+ib' \iff a=a',\ b=b'$

  $z=a+ib$: chiamo a PARTE REALE di z: $\operatorname{Re} z$ e b PARTE IMMAGINARIA di z: $\operatorname{Im} z$

- $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

- $(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd = $ ($i^2=-1$) $= ac-bd+i(ad+bc)$

PROPRIETÀ: le solite algebriche.

zero: $0+0i=0$

unità: $1+0i$ Infatti: $(a+ib)(1+0i)=a-0+i(0+b)=a+ib$.

$-(a+ib)=-a-ib$

$$(a+ib)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

$z=a+ib$ $\qquad a-ib=\bar{z}$ coniugato di z

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2+i(-ab+ba)=a^2+b^2$$

$$(a+ib)\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}=1$$

$$(a+ib)\underbrace{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)}_{\text{reciproco di } a+ib}=1$$

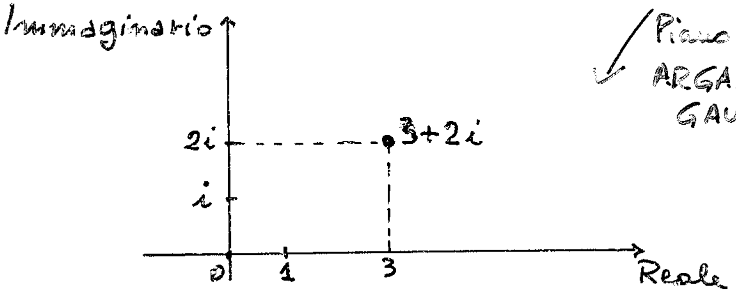
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a + i0\}$

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{a+i0}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$)

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$a+ib \longleftrightarrow (a,b)$$



Piano di ARGAND-GAUSS

Somma ?

Zero ?

Prodotto ??? $\longrightarrow$ serve passare a coordinate polari

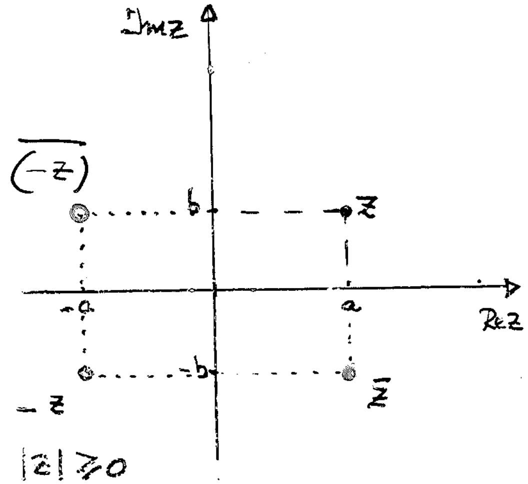
Parte reale di $z = a+ib$: $\mathrm{Re}\, z = a$

Parte immaginaria di z : $\mathrm{Im}\, z = b$

Coniugato di z : $\bar{z} = a - ib = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$

Modulo di z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Proprietà: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ $\qquad z - \bar{z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$



$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\overline{(\mathrm{Re}\, z)} = \mathrm{Re}\, z$

$i(\mathrm{Im}\, z) = -(\mathrm{Im}\, z)i$

$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \leq |z_1 + z_2|$

Trovare la forma algebrica di $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

Quindi $\mathrm{Re}\, z =$ $\qquad \mathrm{Im}\, z =$

$\bar{z} =$ $\qquad |z| =$