$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ Rappresentare in forma algebrica $z = \text{Re}\, z + i\, \text{Im}\, z$

$$z = \frac{(1-i)}{(1-i)} \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(-1-\sqrt{3})}{1+1} =$$

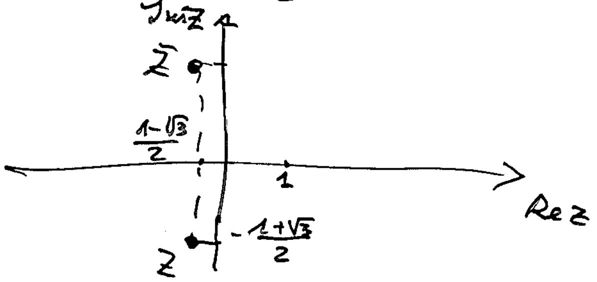
$$= \boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{Re}\, z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Im}\, z = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

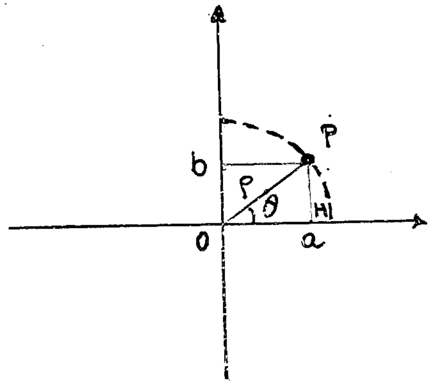
$$|z| = \sqrt{(\text{Re}\, z)^2 + (\text{Im}\, z)^2}$$ verificare che risulta

$$|z| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\bar{z} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$



COORDINATE POLARI



$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho\, \text{sen}\, \theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = ??$

individuato
"modulo 2π"

Argomento di z
Argomento principale di z
$-\pi < \theta \le \pi$

$z = a+ib = \rho(\cos\theta + i\, \text{sen}\, \theta)$: FORMA TRIGONOMETRICA

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\, \text{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$

Vedi pag 3

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i\, \text{sen}(-\theta)\right)$ Vedi pag 4

GRAFICAMENTE ?

Trovare argomento principale e modulo di:

10, $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-\sqrt{3}i$

Vedi pag 5

$$z_1 = \rho_1 \left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 \right)$$

$$z_2 = \rho_2 \left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2 \right)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 \right) \left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2 \right)$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[\left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 \right) + i \left(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \right) \right]$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

NOTARE:

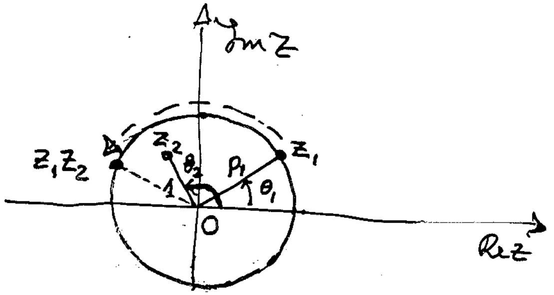
$$|z_1 z_2| = \sqrt{\rho_1^2 \rho_2^2 \cos^2(\theta_1+\theta_2) + \rho_1^2 \rho_2^2 \operatorname{sen}^2(\theta_1+\theta_2)} =$$

$$= \rho_1 \rho_2 \sqrt{\underbrace{\cos^2(\theta_1+\theta_2) + \operatorname{sen}^2(\theta_1+\theta_2)}_{1}} = \rho_1 \rho_2$$

Un argomento di $z_1 z_2$ è $\theta_1 + \theta_1$

Sia $\rho_2 = 1$: $z_1 z_2$ ha lo stesso modulo di z_1 ma argomento $\theta_1 + \theta_2$

$\Downarrow$



$z_1 z_2$ è ottenuto da z_1 facendo una rotazione di z_1 intorno a O di ampiezza (e verso) θ_2

$$z = \rho \left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \right)$$

lo posso vedere come prodotto di

$z_1 = \rho \left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \right)$ reale positivo

$z_2 = 1 \cdot \left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \right)$ di modulo 1

$z_2 = \dfrac{1}{z}$?

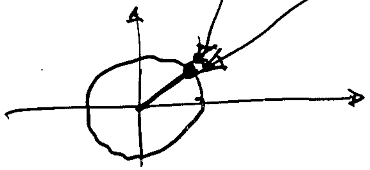
$z \cdot z_2 = 1$

$$z_2 = \rho_2 \left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2 \right)$$

$\Downarrow$

$$z z_2 = \rho \rho_2 \left(\cos(\theta + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta_2) \right)$$

$$= 1 \left(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \right)$$



perché coincidono:

$|z z_2| = \rho \rho_2 = 1 \Rightarrow$

$\rho_2 = |z_2| = \dfrac{1}{\rho}$

inoltre

$$\begin{cases} \cos(\theta + \theta_2) = \cos 0 \\ \operatorname{sen}(\theta + \theta_2) = \operatorname{sen} 0 \end{cases}$$

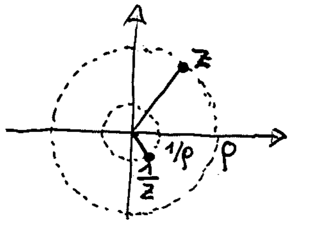
ad es. $\theta + \theta_2 = 0$

$\Rightarrow \theta_2 = -\theta$

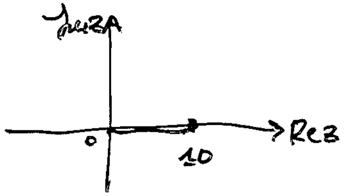
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \left(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \right) =$$

cioè come già visto

$$= \frac{\rho \left(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \right)}{\rho^2}$$

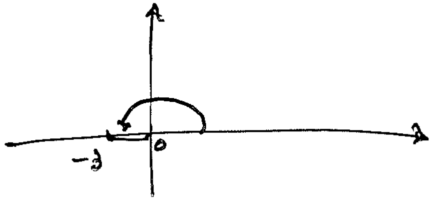


$z = 10$ $\quad |z| = 10$



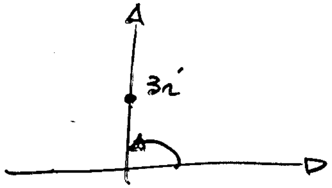
argomento principale $\theta = 0$
In generale
se z è reale > 0
$|z| = z$ e $\theta = 0$

$z = -3$ $\quad |z| = 3$ $\quad$ argom. princ. $\theta = \pi$

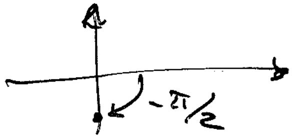


In generale se
z è reale < 0
$|z| = -z$ e $\theta = \pi$

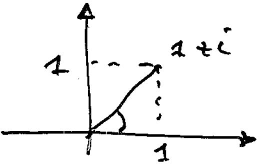
$z = 3i$ $\quad |z| = \operatorname{Im} z = 3$



argom. princ. $\theta = \frac{\pi}{2}$
In generale se z è imm. puro
$|z| = |\operatorname{Im} z|$ e l'argom. principale
sarà $\nearrow \pi/2$ se $\operatorname{Im} z > 0$
$\searrow -\pi/2$ se $\operatorname{Im} z < 0$



$z = 1+i$ $\quad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



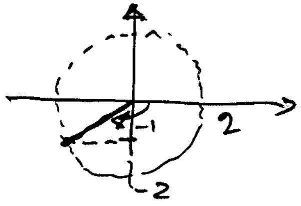
$\Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi/4$ è l'arg. principale

Fare i conti per $\sqrt{3}+i$; $1-\sqrt{3}i$

$z = -\sqrt{3} - i$ $\qquad |z| = \sqrt{3+1} = 2$



$\theta = \frac{-5}{6}\pi$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

ATTENZIONE:

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$

$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

di questi 2 nessuno è l'angolo giusto

Se

$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$z^2 = \rho^2(\cos(\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(\theta+\theta)) = \rho^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen}2\theta)$

$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^3(\cos(2\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta+\theta)) =$

$= \rho^3(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta))$

Allo stesso modo si verifica che se

$z^{n-1} = \rho^{n-1}(\cos[(n-1)\theta] + i\operatorname{sen}[(n-1)\theta])$ allora

$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)}$: per induzione questa formula è VERA per ogni n.

Esempio

$|\sqrt{3}+i| = 2 \quad \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$

$(\sqrt{3}+i)^3 \overset{?}{=} \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 =$

$= 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{6}\right) = 8i.$

$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$

Vedi pag 6

:

$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

Es. $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 8i$

VERO!

=

Viceversa.

cioè l'equazione $z^n = w$ ha n soluz.

Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime complesse: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

e $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$

ρ_k, θ_k incognite.

Se $z_k^n = w$ allora

si ha: $\rho_k = r^{1/n}$ $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Sono tutte distinte

NON ce ne sono altre.

Esempi:

radice cubica di 1:

Vedi pag 9

rappresentazione grafica:

$z^n = w$

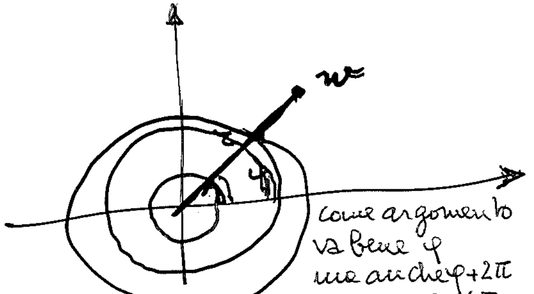
$w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ r e φ noti

incognite sono ρ e θ:

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$(\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta))^n = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

$\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$



come argomento va bene φ ma anche φ+2π o φ+4π....

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ρ e r sono > 0

$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$

Inoltre: $n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$

Le soluzioni sono i numeri complessi con

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

⟺ portano davvero a ∞ numeri complessi? No ce ne sono solo n distinti quelli ottenuti sostituendo n valori consecutivi di k.

$$\boxed{\begin{array}{c} z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \text{e } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{array}} \Longleftarrow$$

Determinare le radici cubiche di $w=1$
cioè le soluz. di $z^3=1$

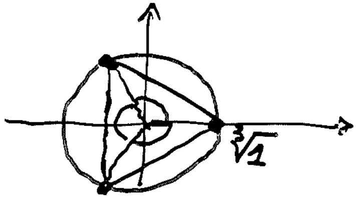
$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ $\qquad 1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases} \text{con } k=-1,0,1$$

$$z_{-1} = 1\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = $$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_0 = 1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$$

$$z_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



TRIANGOLO
EQUILATERO

radice quarta di $-i$:

rappresentazione grafica: Vedi pag 11

radice sesta di $64i$ Vedi pag 13

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$ Vedi pag 12

rappresentazione grafica:

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

Trovare le radici quarte di -1

$$z^4 = -1$$

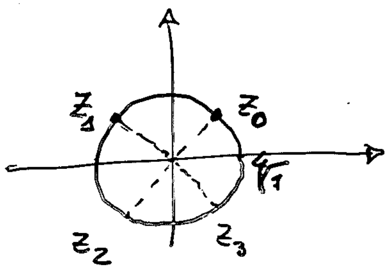
$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$z^4 = \rho^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta)$

$|-1| = 1$

$\arg(-1) = \pi$

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k = 0,1,2,3$$



per $k = 2, 3$ l'argom. non è principale

(oppure $k = -2, -1, 0, 1$: tutti argom. principali)

$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

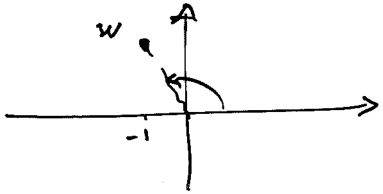
Geometricamente trovo gli altri vertici del quadrato (che in questo caso ha i lati paralleli agli assi)

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Trovare le radici quarte di $w = \sqrt{3}\, i - 1$



$|w| = \sqrt{3+1} = 2$

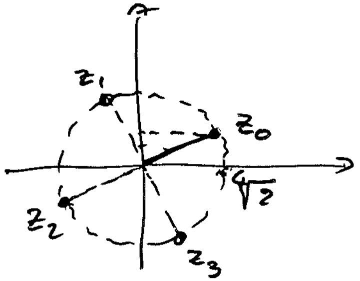
$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$z^4 = \sqrt{3}\, i - 1$

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow z^4 = \rho^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 2 \\ 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k = 0,1,2,3$$



$z_1 z_3 \perp z_0 z_2$

$\Longrightarrow z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + i\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

per ortogonalità

$z_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}\, i$

$z_2 = -z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} - i\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

$z_3 = -z_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$

ATTENZIONE: in questo caso i lati del quadrato NON sono paralleli agli assi

Radice 6^a di $64i = w$

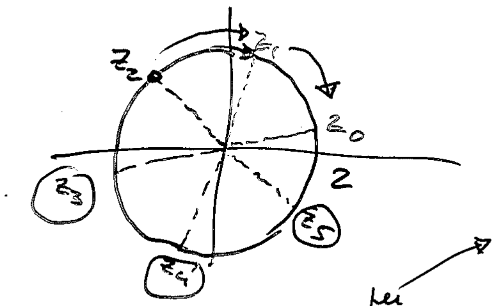
$|w| = 64 \quad \arg w = \frac{\pi}{2}$

$\rho^6 (\cos 6\theta + i \operatorname{sen} 6\theta) = 64i \iff$

$$\begin{cases} \rho^6 = 64 \\ 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\text{Per} \begin{cases} k=0 & \theta_0 = \frac{\pi}{12} \\ k=1 & \theta_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} \\ k=2 & \theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

scomodi!



$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

per rotazione di $-\frac{\pi}{3}$

$z_1 = z_2 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

$= (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(Ho fatto i conti bene? Quanto meno $|z_1| = 2$?

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4$ ok.)

Invece per rotazione di z_2 di $-\frac{2\pi}{3}$:

$z_0 = z_2 \left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z_3 = -z_0 \\ z_4 = -z_1 \\ z_5 = -z_2 \end{array}$

Risolvere le seguenti equazioni:

$i z^3 = \bar{z}$

$4|z| = z^3 \qquad |z| = -iz^3$

$|z^3| = -4z$ dire a priori quante soluzioni sono complesse NON reali

$(z-i)^4 = 1 + \sqrt{3}i$

- Supponiamo che una radice 4^a di w sia $2-3i$. Determinare le altre radici quarte
- Supponiamo che una radice 3^a di w sia $12-5i$. Determinare le altre radici terze
- $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ è una radice nona di se stessa?
- Trovare modulo e argomento principale di $z = (1+i)^5$. Rappresentare poi sul piano di A.G. tutte le radici quinte di z
- Trovare le radici terze di $\frac{i\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{5 + 3i}$

Osservare che non si può introdurre in $\mathbb{C}$ un ordinamento compatibile con somma e prodotto (cioè tale che se $z_1 > 0$ e $z_2 > 0$ allora $z_1 \cdot z_2 > 0$ e $z_1 + z_2 > 0$). Infatti i e $-i$ non possono essere entrambi > 0, altrimenti avremmo

$0 = i + (-i) > 0 + 0 = 0$: ASSURDO $(0 > 0)$

Ma se $i > 0$ anche $-i = i \cdot i \cdot i > 0$

se $-i > 0$ anche $i = (-i)(-i)(-i) > 0$!