RO

NUMERI ... quali ?

NATURALI : $(\mathbb{N}, +, \cdot) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
con le operazioni di somma e prodotto

$\supseteq$

INTERI NON NEGATIVI:
$\mathbb{N} \cup \{0\}$

opposto di un numero?

$\cap$

INTERI (relativi): $\mathbb{Z} =$
$= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}$

$\subseteq$

inverso di un numero?

RAZIONALI POSITIVI : $\mathbb{Q}^{>0} =$
$= \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \dots, \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p, q \in \mathbb{N}$ e
$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff_{DF} pq' = p'q$

$\subseteq$ $\supseteq$

inverso di un numero non nullo?

RAZIONALI (relativi): $\mathbb{Q} =$
$= \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \dots, \pm \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p, q \in \mathbb{N}$ e la regola di identificazione vista sopra.

SIMBOLOGIA

$X \subseteq Y$: l'insieme X <u>è contenuto</u> in Y (cioè tutti gli elementi di X sono anche elementi di Y).

$x \in X$: l'elemento x <u>appartiene</u> ad X (cioè sta in X)

$X \cup Y$: insieme <u>unione di</u> X <u>e</u> Y (insieme degli elementi che stanno in X o in Y)

$\iff$: "se e solo se"

$X \cap Y$ = intersezione

PROPRIETA' DEI RAZIONALI: $\mathbb{Q}$

ALGEBRICHE:

in $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni: $+, \cdot$
con le seguenti proprietà:

A0 $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a+b \in \mathbb{Q}$ | $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ M0

A1 $a+b=b+a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ M1

A2 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $(a+b)+c = a+(b+c)$ | $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ M2

A3 $\exists z, u \in \mathbb{Q}$: $\forall a \in \mathbb{Q}$ $a+z=a$ | $a \cdot u = a$ M3

z: zero 0 | u: unità 1

A4 $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\exists \bar{a} \in \mathbb{Q}$: $a+\bar{a} = z$

$\bar{a}$: opposto di a | $-a$

$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\exists a' \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$: | $a \cdot a' = u$ M4

a' : reciproco di a

$\frac{1}{a}$, a^{-1}

D $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$\Downarrow$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$:

$$0 \cdot b = 0$$
$$(-a)\cdot b = a \cdot(-b) = -(a \cdot b)$$
$$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$$

CONSEGUENZA DELL'ESISTENZA DEL RECIPROCO:

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

$$a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow b = 0$$

Perché per ogni $b \in \mathbb{Q}$ si ha

$$0 \cdot b = b \quad ?$$

$$(a) \cdot b \underset{\text{def di zero}}{=} (a+0)\, b \underset{\text{distr.}}{=} ab + 0 \cdot b$$

$$\Updownarrow$$

$$ab = ab + 0 \cdot b$$

Sottraggo ab a entrambi i membri dell'uguaglianza

$$ab - ab = \cancel{ab} + 0 \cdot b - \cancel{ab}$$

prop. commutativa

$$(*) \qquad 0 = 0 \cdot b$$

Perché $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$?

$$(a^{-1} b^{-1})(ab) \underset{\text{assoc.}}{=} a^{-1} b^{-1} a b \underset{\text{comm.}}{=}$$

$$= \underbrace{a^{-1} \cdot a} \cdot \underbrace{b^{-1} \cdot b} = \quad \text{def di reciproco}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

DOVE può essere utile ricordare (*) ?
Quando, risolvendo un'equazione, si moltiplicano entrambi i membri per una quantità che per qualche valore di x si annulla. Escludere questi valori dalle soluzioni!

$a\cdot b=0 \implies$ o $a=0$
o $b=0$

Detto altrimenti

$a\cdot b=0$ e $a\neq 0 \implies b=0$

DUE POSSIBILI ENUNCIATI della LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

Dimostrazione.

Sia $a\cdot b=0$.

Se $a\neq 0$ esiste a^{-1}

Moltiplico per a^{-1} entrambi i membri:

$a^{-1}(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0$

$\|$ associativa $\qquad$ $\|$ poiché so che $\forall b : 0\cdot b=0$

$$\underbrace{\underbrace{(a^{-1}\cdot a)}_{=1 \text{ def. di reciproco}}\cdot b}_{=b \text{ def. di unità}} \qquad 0$$

$\implies b=0$

Serve per risolvere equazioni che si possono porre nella forma

$$A(x)\cdot B(x)=0$$

$A(x), B(x)$ espressioni in x (incognita)

$\xRightarrow{\text{annull. prodotto}}$ o $A(x)=0$ o $B(x)=0 \implies$ le soluz.

dell'equazione $A(x)\cdot B(x)=0$ sono l'unione delle soluzioni di

$$A(x)=0$$

e di

$$B(x)=0.$$

Detto formalmente:

Detto S l'insieme degli $x\in\mathbb{R}$ che sono soluz. di $A(x)=0$ e T l'insieme degli $x\in\mathbb{R}$ che sono soluz. di $B(x)=0$ le soluz. di

$$A(x)\cdot B(x)=0$$

hanno la forma $S\cup T$

A PROPOSITO DI UNIONE e INTERSEZIONE, in che cosa differiscono i due problemi:

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \quad ?$$

o più in generale:

$$A(x)\cdot B(x)=0$$

o $A(x)=0$ o $B(x)=0$

$$\boxed{S\cup T}$$

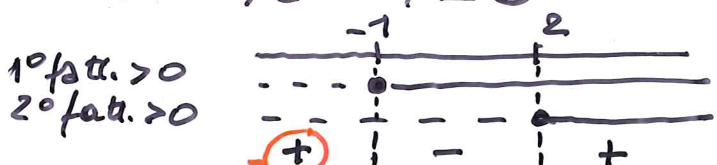
Risolvere un sistema significa trovare le soluz. comuni alle due equaz.

$$\begin{cases} A(x)=0 & \text{sol: } S \\ B(x)=0 & \text{sol: } T \end{cases}$$

$$\boxed{S\cap T}$$

IDEM per le disequazioni:

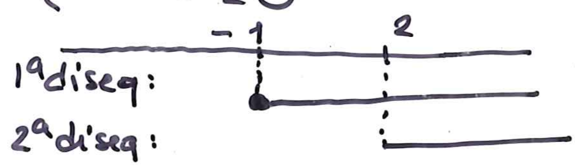
$$(x+1)(x-2)\geq 0$$



il prodotto di 2 quantità <0 è positiva (VEDI pag R3)

SOL: $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$$



SOL. COMUNI: $(2,+\infty)$

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO:

in $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento:

se $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e n, q sono numeri interi positivi
(m, p interi qualunque)

$$\frac{m}{n} \le \frac{p}{q} \iff q \cdot m \le p\, n$$

Es. $\frac{1}{n} \le \frac{p}{1} = p$ se $p > 0$ e $n > 0$

$-\frac{7}{2} < \frac{1}{100}$

$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$ ma $\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2}$

$$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2} \iff 2^8 > 3^5$$

$$\Updownarrow$$

$256 > 243$ Sì!

$$\frac{(-2^7)}{3^4} \overset{?}{>} \frac{(-3)}{2} \iff -2^8 \overset{?}{>} -3^5$$

Non può essere vera!