PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO:

in $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento:

se $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e n, q sono numeri interi positivi (m, p interi qualunque)

$$\frac{m}{n} \le \frac{p}{q} \iff qm \le pn$$

Es. $\frac{1}{n} \le \frac{p}{1} = p$ se $p > 0$ e $n > 0$

$-\frac{7}{2} < \frac{1}{100}$

$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$ ma $\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2}$

Per esso valgono le proprietà

O1 riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$: $a \le a$

O2 antisimmetrica: $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a \le b$ e $b \le a \Rightarrow a = b$

O3 transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \le b$ e $b \le c \Rightarrow a \le c$

Inoltre tale ordinamento è compatibile con la struttura algebrica:

C1 $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$

C2 $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $\boxed{c > 0}$: $a \le b \Rightarrow ac \le bc$

O4 Ed è un ordinamento totale, cioè $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ con $a \ne b$ si ha o $a < b$ o $b < a$.

Insieme dei razionali > 0 ...

Non tutti gli ordinamenti sono totali.

Ad es.

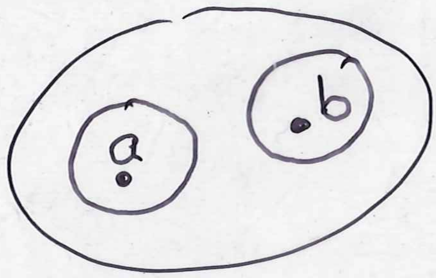
la relazione di <u>inclusione</u> tra i sottoinsiemi di un insieme dato è una relazione d'ordine NON TOTALE.

Infatti, ad es. l'insieme $S = \{a, b\}$ ha come sottoinsiemi, oltre a S e $\emptyset$ (insieme vuoto) anche $\{a\}$ e $\{b\}$

Si ha

$$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq S$$
$$\emptyset \subseteq \{b\} \subseteq S$$

ma non posso confrontare $\{a\}$ con $\{b\}$: nessuno dei due contiene l'altro.



Conseguenze della compatibilità

C1 $\Rightarrow$ $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

C2 $\Rightarrow$ $a \leq b$ e $c < 0 \Rightarrow bc \leq ac$ (C2.1)

$\left.\begin{array}{l} a, b \text{ di segno concorde} \\ a < b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (C2.2)

$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

ESERCIZI

$\forall a \in \mathbb{Q} \quad a^2 \geq 0$

$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad 2ab \leq a^2 + b^2$

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA: *

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$ con $0 < b < a$ $\exists n$ intero positivo t.c. $nb > a$

PROPRIETÀ DI DENSITÀ *

per ogni intero positivo fissato q e per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste un intero p tale che

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

Differenza rispetto agli interi.

* Geometricamente ...

$c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -c \geq 0$ R3.1

$a \leq b \quad \Rightarrow \quad -c \cdot a \leq -c \cdot b$

$\Rightarrow \quad cb \leq ca$

DIMOSTRAZIONE di (C2.1)

$(0 <) a \leq b$ moltiplico entrambi i membri per $\frac{1}{a} > 0$

DIMOSTRAZIONE DI (C2.2)

$1 = a \cdot \frac{1}{a} \leq b \cdot \frac{1}{a}$

moltiplico per $\frac{1}{b}$

$\frac{1}{b} = 1 \cdot \frac{1}{b} \leq b \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

Se $a \leq b < 0$

$\Rightarrow \quad 0 < -b \leq -a$

$-\frac{1}{a} \leq -\frac{1}{b}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

ILLUSTRAZIONE DELLA DENSITÀ CON $q = 10$

Es1

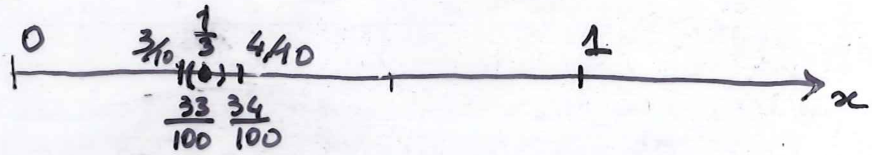
$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} > \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} < \frac{4}{10} \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10}$

Es2: $\frac{4}{3}$ $\quad 1,3 = 1 + \frac{3}{10} < \frac{4}{3} < 1 + \frac{4}{10} < 1,4$

E con $q = 10^2$ $\quad 1 + \frac{33}{10^2} = 1,33 < \frac{4}{3} < 1,34 = 1 + \frac{34}{10^2}$

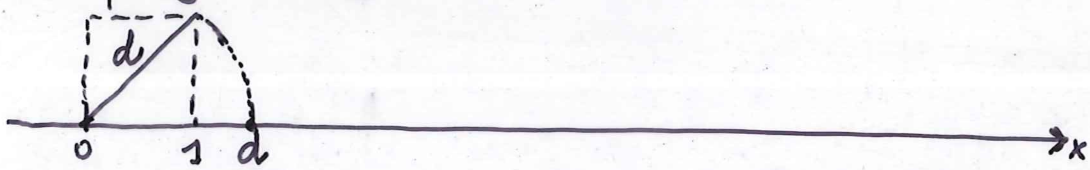
E si può raffinare ...

Illustrazione geometrica della proprietà di densità



Posso inscatolare $\frac{1}{3}$ in intervalli di ampiezza piccola quanto voglio $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2} \text{ ecc.}\right)$.

Problema che origina dal fatto (dimostrato sulla pag. successiva) che $\sqrt{2}$ non è razionale:



Il punto di ascissa d è un punto della retta (ho riportato su di essa il secondo estremo della diagonale del quadrato di lato 1) ma la sua ascissa non è razionale $\Rightarrow$ ci sono punti sulla retta <u>che non sono rappresentati da numeri razionali</u>.

Penso ai punti della retta come numeri (identificandoli con le loro ascisse) e chiamo ciascuno di questi punti numero reale. Cioè l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ "è" l'insieme dei punti della retta:

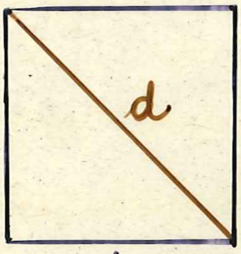
- alcuni di questi sono RAZIONALI
- altri sono IRRAZIONALI e di questi
  - alcuni sono ALGEBRICI (soluzioni di eq. di tipo "polinomio in x" = 0) Ad es. $\sqrt{2}$
  - altri non lo sono: si dicono TRASCENDENTI Ad es. $\pi = \frac{\text{lungh. circonf}}{\text{lungh. diam.}}$

IL PROBLEMA DEI NUMERI REALI.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}$ nascono come ampliamenti successivi di $\mathbb{N}$ conseguenti a pure richieste algebriche (che esprimono esigenze concrete ...).
Invece i NUMERI REALI ($\mathbb{R}$) vengono introdotti in risposta a quesiti alcuni dei quali possono essere tradotti algebricamente, altri no.

ESEMPI.

1. Se un quadrato ha il lato lungo 1 (rispetto ad un'unità di misura prefissata) qual è la lunghezza d della sua diagonale?



1

Il teor. di Pitagora permette una espressione algebrica del problema:

(*) $\quad d^2 = 1+1 = 2$

Si dirà che d (soluzione di un'eq. algebrica) è un NUMERO ALGEBRICO.

Ma nessun numero razionale $\frac{p}{q}$ soddisfa la (*)!

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$d = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ con p e q interi primi tra loro

$\Downarrow$

$2q^2 = p^2$

$\Downarrow$

2 divide p : $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ 2 divide q $\Rightarrow$ assurdo

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

Problema di $\sqrt{2}$

(geometricamente:) problema dei punti della retta non rappresentati da numeri razionali

Soluzione : ampliamento del CAMPO ORDINATO ARCHIMEDEO $\mathbb{Q}$

Dal punto di vista dell'insieme di numeri: prendo

ogni allineamento decimale

- limitato o non limitato
- periodico o $\underbrace{\text{non periodico}}_{\text{IRRAZIONALI}}$

(ATTENZIONE alle necessarie identificazioni:

$$0.\bar{9} = \ldots$$)

E' uno dei tanti MODELLI dell'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono def. $+, \cdot, \leq$ e godono delle proprietà viste in $\mathbb{Q}$.

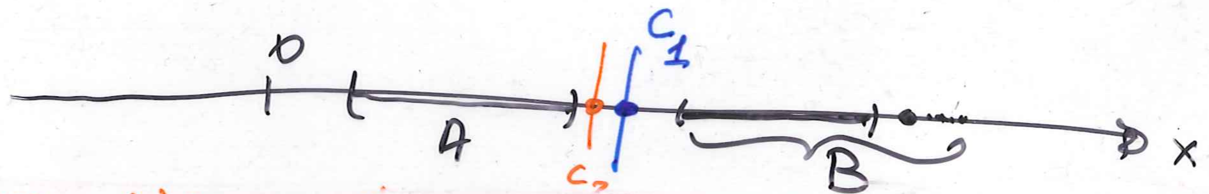
In più

COMPLETEZZA: dati comunque due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ t.c.

$$\forall a \in A \;, \forall b \in B \quad \text{risulti } a \leq b$$

ESISTE ALMENO un numero reale c t.c.

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A \;, \forall b \in B$$



ESEMPIO di una situazione in cui esiste più di 1 SEPARATORE

Sui numeri razionali la proprietà di completezza non vale. Infatti considero ad es

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$$

TALE CHE

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 > 2 \}$$

i due insiemi sono separati ma esiste un $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\frac{p}{q} \geq a \in A$$

$$\frac{p}{q} \leq b \in B \quad ?$$

l'unico possibile separatore sarebbe $\sqrt{2}$ che però non è razionale

Se ci fosse $a \leq \frac{p}{q} \leq b$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2 \quad \nearrow \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2 \implies \frac{p}{q} \in A$$

$$\searrow \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2 \implies \frac{p}{q} \in B$$

ma fissato $\frac{p}{q} \in A$ esiste $\frac{p'}{q'} \in A$ con $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ per la densità.

Corrispondenza tra NUMERI RAZIONALI e NUMERI DECIMALI ...

1) Ogni num. razionale è rappresentato da una frazione (o meglio: da una qualunque delle infinite frazioni tra loro equivalenti. Ad es. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots = \frac{n}{2n} = \dots$ con $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ rappresentano tutte lo stesso numero razionale)

2) Il significato di una frazione $\frac{n}{d}$ ($n, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$) è ... divido il numeratore per il denominatore. Se n è un MULTIPLO INTERO di d si ha un numero intero. Altrimenti:

2A) se d è prodotto di potenze di 2 e di 5 "la divisione produce un numero decimale limitato".

Che cosa nasconde questa affermazione?

Che abbiamo deciso di rappresentare i numeri interi e i razionali in BASE $10 = 2 \cdot 5$

Esercizio: adattare i ragionamenti al caso in cui si scelga come BASE 2.

Perché è vera l'affermazione?

Iniziamo da esempi:

$\frac{3}{2} = \frac{30}{2} \cdot \frac{1}{10} = 15 \cdot \frac{1}{10}$ ---> $\boxed{1},\boxed{5}$

nel numeratore l'ultima cifra a destra rappresenta i DECIMI

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3}$ ---> $\boxed{0},\boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}$

nel numeratore l'ultima cifra a destra rappresenta i MILLESIMI

$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{10^2}$ ---> $\boxed{0},\boxed{0}\boxed{5}$

IN GENERALE, se $k \in \mathbb{Z}$ e $p, q \in \mathbb{N}$ (ove penso anche $0 \in \mathbb{N}$)

$$\frac{k}{2^p 5^q} = \frac{k \cdot 2^q \cdot 5^p}{2^{p+q} \cdot 5^{p+q}} = \frac{k \cdot 2^q \cdot 5^p}{10^{p+q}}$$

e, nel decimale, l'ultima cifra a destra del numeratore deve essere posta $p+q$ posti dopo la virgola.

Come visto nell'ultimo esempio in realtà basta moltiplicare il numeratore: $\begin{cases} \text{per } 5^{p-q} & \text{se } p > q \\ \text{per } 2^{q-p} & \text{se } p < q \end{cases}$

... ma la formula scritta sopra è "più facile".

2B) Se il denominatore d della frazione $\frac{n}{d}$, una volta ridotta ai minimi termini, contiene fattori diversi da 2 e 5 "la divisione produce un <u>numero</u> <u>decimale</u> <u>illimitato</u> <u>periodico</u>".

Esempio: $\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{30} =$

$= 0,3 + \frac{1}{30}$ E ADESSO?

$$\frac{1}{30} = \frac{100}{30} \cdot \frac{1}{10^2} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{10^2} = 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{300}$$

cioè $\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + \frac{1}{300} = 0,33 + \frac{1}{300}$

e così via all'infinito...

SCRIVO $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ per indicare che ogni approssimazione successiva di $\frac{1}{3}$ con un decimale deve contenere "un 3 in più".

Che il risultato sia illimitato si capisce (il numeratore non ha tra i suoi fattori tutti quelli del denominatore e usando come BASE 10 posso giocare solo su prodotti per 2 e per 5, non per 3) ma <u>perché</u> <u>periodico</u>?

L'algoritmo della divisione tra interi dice che:
se $n, d \in \mathbb{Z}$ e $d \neq 0$ esistono e sono unici

- il quoziente q
- il resto r

della divisione di n per d e il RESTO r È TALE CHE $\boxed{0 \le r < d}$.

Quindi dopo al più $(d-1)$ passi il resto si ripete! E a quel punto nelle successive divisioni si ripresentano le stesse cifre.

ESEMPIO: $\frac{1}{7} = ?$

PRIMA ABBIAMO SPIEGATO PASSO PASSO CHE COSA C'È DIETRO IL METODO DI CALCOLO di $1/3$ APPRESO ALLA SCUOLA DELL'OBBLIGO. ORA USO DIRETTAMENTE IL METODO:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\
\cline{2-2}
10 & 0,142857\ldots \\
\quad 30 & \\
\quad\; 20 & \\
\quad\;\; 60 & \\
\quad\;\;\; 40 & \\
\quad\;\;\;\; 50 & \\
\quad\;\;\;\;\; 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 0\cdot 7 + 1 \\
10 &= 1\cdot 7 + 3 \\
30 &= 4\cdot 7 + 2 \\
20 &= 2\cdot 7 + 6 \\
60 &= 8\cdot 7 + 4 \\
40 &= 5\cdot 7 + 5 \\
50 &= 7\cdot 7 + 1
\end{aligned}
$$

In questo caso servono esattamente 6 passi per arrivare a ripetere il primo resto: 1.

Quindi il "periodo è lungo 6" e SCRIVO

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

3) Quindi di ogni numero razionale posso dare una rappresentazione decimale che potrà essere limitata (eventualmente senza cifre dopo la virgola) o illimitata ma periodica.

<u>È vero anche il viceversa</u>?

3 A) Se parto da un decimale limitato è chiaro come associargli una frazione e quindi un numero razionale:

Esempio:

$$0,375 = \frac{375}{10^3} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$$

3 B) Se parto da un decimale illimitato periodico posso ragionare come in questo esempio:

cerco il numero razionale x tale che $x = 0,\overline{35}$.

Poiché il periodo è lungo 2

$$10^2 x = 35,\overline{35}$$

Quindi

$$100x - x = 35,\overline{35} - 0,\overline{35}$$

da cui

$$99x = 35$$

cioè $$x = \frac{35}{99}$$

Regoletta: costruisco la frazione mettendo le cifre del periodo al numeratore e dividendo per un numero che ha tante cifre uguali a 9 quanto è la lunghezza del periodo.

E se c'è l'antiperiodo?

$x = 2,4\overline{35}$?

$$x = 2,4 + 0,0\overline{35} = \frac{24}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0,\overline{35} = \frac{24}{10} + \frac{35}{990} =$$

$$= \frac{24 \cdot 99 + 35}{990}$$

Altra regola che non enuncio: così è PIÙ FACILE!

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra numeri razionali e allineamenti decimali limitati o illimitati periodici?

... Quasi!

PROBLEMA

$x = 0,\overline{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{9} = 1$

cioè il numero razionale 1 può essere rappresentato tanto dall'allineamento decimale 1 che dall'allineamento decimale $0,\overline{9}$.

Analogamente: $31,2\overline{9} = 31,3$ ecc.

Per eliminare questa anomalia <u>si conviene</u> di identificare queste scritture, cioè - in sostanza - <u>di non usare mai rappresentazioni decimali in cui compaia il periodo $\overline{9}$</u> e di usare invece quelle corrispondenti in cui

il decimale immediatamente precedente il periodo è aumentato di 1.

ATTENZIONE: non userò $0,1\overline{9}$ bensì $0,2$

ma $0,\overline{19} = \frac{19}{99}$ ... cioè il periodo cui si fa riferimento nella frase precedente DEVE CONTENERE SOLO LA CIFRA 9!

se ne contiene altre il problema non si pone.

Ciò posto, possiamo identificare i razionali con gli allineamenti decimali limitati o illimitati periodici.

Promesso a lezione:

Esempio di numero reale non razionale rappresentato come allineamento decimale illimitato non periodico:

$0,10100100010000\ldots\ldots$ e proseguo con la legge:

dopo ciascun 1 metto tanti zeri quanti sono gli 1 scritti fino a quel punto.

ESERCIZI

Valore assoluto o modulo di un numero reale a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Geometricamente $|a|$

è la distanza del punto di ascissa a dall'origine O del sistema di riferimento

Chi è: $\{a \in \mathbb{R}$ tali che $|a| = 2\}$?

È l'insieme dei due numeri $a=2$, $a=-2$

Risolvere

$$2x^2+x-1>0$$

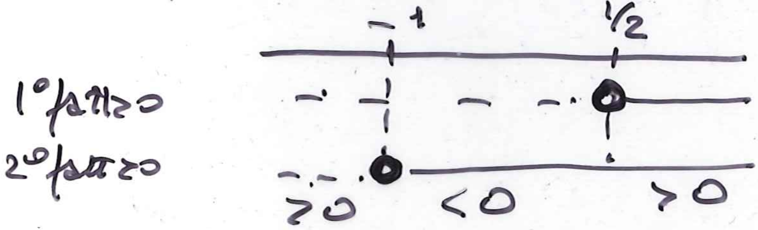
L'equazione soggiacente è $2x^2+x-1=0$

Ne cerco le radici: $x_1=-1$, $x_1x_2=-\frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$x_2=\frac{1}{2}$$

$$(2x-1)(x+1)>0$$



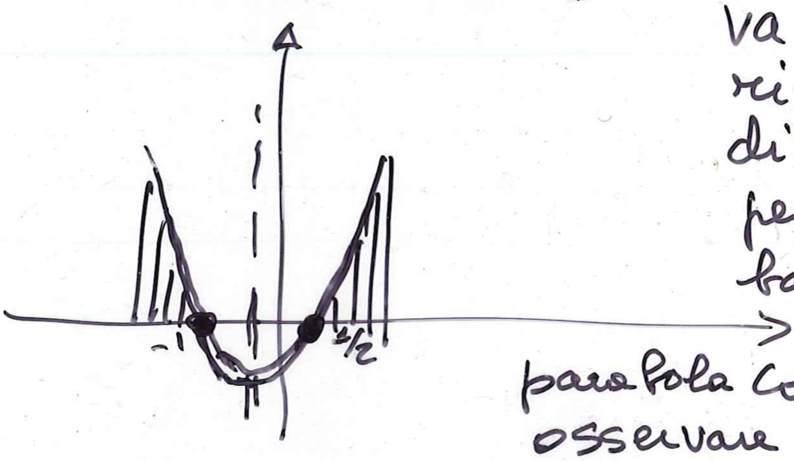
L'insieme delle soluzioni è

$$\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1 \text{ oppure } x>\frac{1}{2}\right\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=(-\infty,-1)\cup(1/2,+\infty)$$

$$y=2x^2+x-1$$



Va bene anche risolvere la disequazione per via grafica: basta trovare le intersezioni della parabola con l'asse x e osservare che la parabola è CONVESSA poiché il coeff. di x^2 è >0.

Risolvere:

$$|x^3 - x| \leq 0$$

OSS.1 un MODULO NON PUÒ MAI ESSERE < 0 poiché misura la "DISTANZA dall'ORIGINE degli assi". Quindi

$$|x^3 - x| \leq 0 \iff |x^3 - x| = 0$$

$$\iff x^3 - x = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Sono le 3 soluzioni.

Se invece divido le 2 situazioni devo discutere

$$\begin{cases} x^3 - x \geq 0 \\ x^3 - x \leq 0 \end{cases}$$ (1° caso del valore assoluto) $|a| = a$ poiché $a \geq 0$

oppure

$$\begin{cases} x^3 - x < 0 \\ x - x^3 \leq 0 \end{cases}$$ (2° caso del val.assoluto: $|a| = -a$ poiché $a < 0$)

I sistema equivale a $x^3 - x = 0$

II sistema $\begin{cases} x^3 - x < 0 \\ x^3 - x \geq 0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

Alla fine unisco le soluzioni...

$$\{0, 1, -1\}$$

Risolvere:

$$\frac{|x-1|}{|5-x|} \le 1$$

Osservazione: deve essere

$x \neq 5$

quindi posso moltiplicare entrambi i membri della disug. per $|5-x|$ che è >0

$$\begin{cases} |x-1| \le |5-x| \\ x \neq 5 \end{cases}$$

→ Tre intervalli: $(-\infty, 1), [1, +5), (5, +\infty)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ 1-\cancel{x} \le 5-\cancel{x} \end{cases} \cup \begin{cases} x \in [1, 5) \\ x-1 \le 5-x \end{cases} \cup \begin{cases} x \in (5, +\infty) \\ \cancel{x}-1 \le \cancel{x}-5 \end{cases}$$

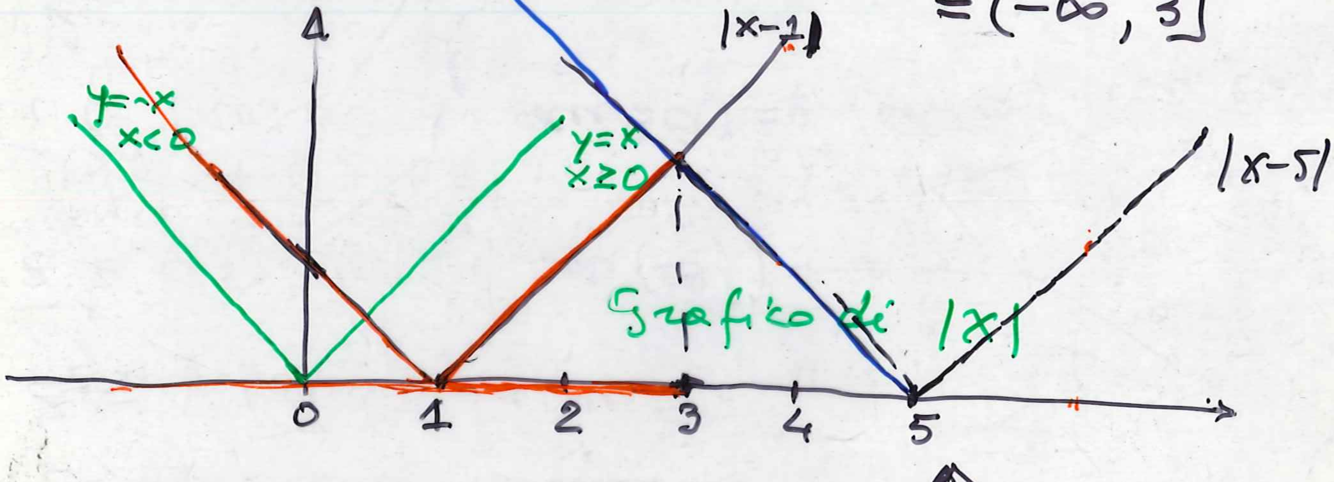
$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ \text{per ogni } x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in [1, 5) \\ 2x \le 6 \end{cases} \qquad \emptyset$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(-\infty, 1) \qquad\qquad [1, 3]$$

Le Soluzioni sono date da $(-\infty, 1) \cup [1, 3] =$
$= (-\infty, 3]$



Oppure per via grafica

N.B. $|x-5| = |5-x|$ poiché

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5 \\ 5-x & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

$$|5-x| = \begin{cases} 5-x & \text{se } x \leq 5 \\ x-5 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Risolvere:

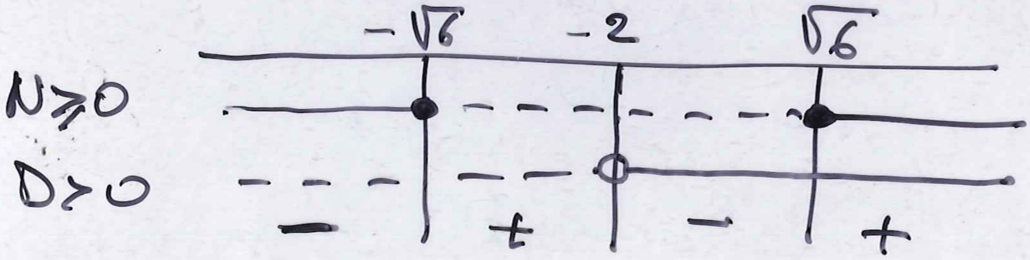
$$\frac{x}{x+2} \leq 3-x \qquad \text{I.D. } x \neq -2$$

$$\frac{x}{x+2} - 3 + x \leq 0 \iff \frac{\cancel{x} \cancel{-3x} - 6 + x^2 \cancel{+2x}}{x+2} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2-6}{x+2} \leq 0$$

$N = 0$ per $x = \pm\sqrt{6}$

$D = 0$ per $x = -2$



$\Rightarrow$ Soluzioni:

$(-\infty, -\sqrt{6}] \cup (-2, \sqrt{6}]$

Dim. del fatto che

$$a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{Q}$$

(o anche $\forall a \in \mathbb{R}$)

Sia $a \geq 0$. Uso la compatibilità con il prodotto

$$\underbrace{a \cdot a}_{= a^2} \geq \underbrace{0 \cdot a}_{= 0} \qquad \text{TESI!}$$

Sia $a < 0$

considero $|a| = -a > 0$

Per quanto appena visto

$$(-a)^2 > 0$$

ma $(-a)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 > 0$

Dimostro che $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Infatti la tesi equivale a

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

cioè

$$(a-b)^2 \geq 0$$

e questo è sempre vero per l'enunciato precedente.