Controesempio su $\mathbb{Q}$.

Perché ALMENO 1 ?

Condizione equivalente ? DEFINIZIONI

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto limitato se
  esistono $l, L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x \leq L$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto superiormente limitato se
  esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad x \leq L$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto inferiormente limitato se
  esiste $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo superiore $\operatorname{Sup} E$ se
  $\exists\, S = \operatorname{Sup} E \mid \forall x \in E$ risulta $x \leq \operatorname{Sup} E$ e
  $\forall y \in \mathbb{R}$ {t.c. $\forall x \in E$ risulti $x \leq y$} $\Rightarrow \operatorname{Sup} E \leq y$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo inferiore $\operatorname{Inf} E$ se
  $\exists\, I = \operatorname{Inf} E \mid \forall x \in E$ risulta $I \leq x$ e
  $\forall y \in \mathbb{R}$ t.c. {$\forall x \in E$ risulti $y \leq x$} $\Rightarrow y \leq I$

- M massimo di E
  Se esiste $\operatorname{Sup} E$ e $\operatorname{Sup} E \in E$ dico che $\operatorname{Sup} E$ è il massimo di E

- m minimo di E
  Se $\operatorname{Inf} E$ esiste ed $\operatorname{Inf} E \in E$ dico che $\operatorname{Inf} E$ è il minimo di E

TERMINOLOGIA

Tra i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ alcuni rivestono particolare importanza ... tanto da meritare un nome

intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =: (a, b) =:]a, b[$$

intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a, b]$$

intervallo semiaperto a sinistra ...

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =: (a, b]$$

intervallo semiaperto a destra ....

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =: [a, b)$$

Per analogia, anche gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =: (-\infty, a)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =: (-\infty, a]$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =: (a, +\infty)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} =: [a, +\infty)$$

saranno detti talora intervalli (illimitati).

Ogni intervallo aperto limitato contenente un numero x_0 sarà detto intorno di x_0. L'intervallo aperto limitato

$$U(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

sarà detto intorno (di x_0) centrato in x_0 e di semiampiezza r.

Un numero x_0 sarà detto punto di accumulazione per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di x_0 c'è almeno 1 elem. $\neq x_0$ di A. Ad es. $x_0 = a$ è punto di accumulazione per $A = (a, b)$.

ESEMPI su estremi superiori e inferiori

$E = [1, 3)$

$E = \mathbb{N}$

$E = \mathbb{Z}$

$E = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8 \}$

TEOR. dell'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE).

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato e non vuoto allora E ammette estremo superiore

questa condizione (ogni s.i. superiormente limitato ha estremo superiore) EQUIVALE alla COMPLETEZZA

Permette di dire che in $\mathbb{R}$ esiste $\sqrt{2}$ e più in generale che

(ESISTENZA DELLE RADICI n-ESIME ARITMETICHE)

$\forall y \in \mathbb{R},\ y > 0$ e $\forall n \geq 1$ esiste 1 e 1 sol numero reale positivo x t.c.

$$x^n = y$$

x viene denotato con $\sqrt[n]{y}$

ES1

$E = [1,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$

è inf. limitato? $l = 1$ ma anche
$l = 0,5$
$l = 0$
$l = -1$ ...
sono minoranti

esiste l'estremo inf.: $\inf E = 1$

$1 \in E \Rightarrow E$ ha minimo e $\min E = \inf E = 1$

è sup. lim.? $L = 3$ ma anche
$L = 10$ o $L = \pi$
sono MAGGIORANTI

l'estremo superiore è $\sup E = 3$

esiste il $\max E$? NO poiché $3 \notin E$.

$\sup E = 3$ perché (denoto con ε un numero reale > 0, piccolo quanto voglio)
se considero $3-\varepsilon$, questo <u>non è $\sup E$</u> in quanto posso trovare un altro numero (ad es. $3 - \frac{\varepsilon}{10}$) che ancora sta in E ma è più grande di $3-\varepsilon \Rightarrow 3-\varepsilon$ <u>non è un</u> maggiorante di E. Invece 3 è un maggiorante di E e per quanto appena visto è "IL PIÙ PICCOLO" $\Rightarrow$ è $\sup E$

ES.2

$E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

è limitato inferiormente da $\ell = 0$

$\inf E = 0$ che $\in E$

$\min E = 0$

è limitato sup. ? NO

Scrivo formalmente : $\sup E = +\infty$

Di MAX nel caso di insieme sup. illimitato non se ne parla proprio!

$E = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

illimitato inferiormente e superiormente

$E = \left\{ \frac{1}{n+1} , n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

limitato inf. e sup.

$\inf E = 0$ non è $\min E$ perché $0 \notin E$

$\sup E = 1 = \max E$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \le 8\}$$

Superiormente limitato

$$x^3 \le 8 \iff x^3 - 8 \le 0$$

$$(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}\le 0$$

pol. di 2° grado senza radici
poiché $(x+1)^2+3 \geq 3$
e per di più sempre positivo

$$\Updownarrow$$

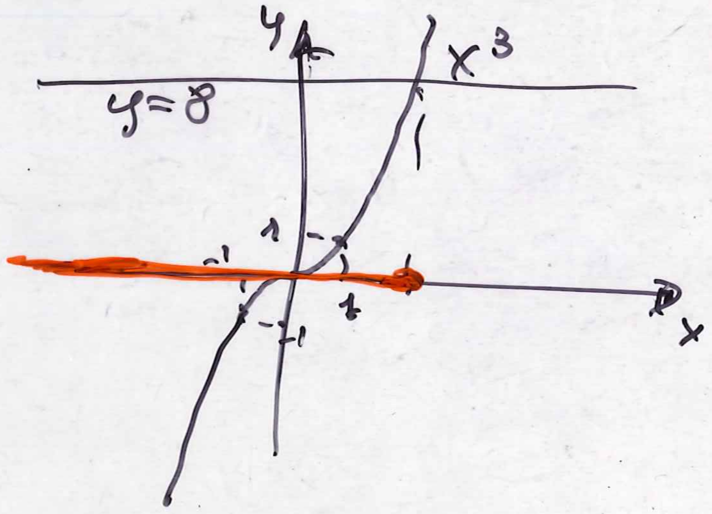
$$x-2 \le 0 \iff x \le 2$$

Quindi $E \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\} = (-\infty, 2]$

$\Rightarrow$ $\sup E = \max E = 2$

$\inf E = -\infty$

Posso anche risolvere l'esercizio per via grafica!



FUNZIONI NUMERICHE (REALI DI VARIABILE REALE)

Esempi

- spostamento di un grave lasciato cadere (da una altezza h) in dipendenza del tempo:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

- Volume di una sfera in dipendenza del suo raggio

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Trasformazione isoterma (di una mole di gas ideale)

$$p(V) = RT \cdot \frac{1}{V}$$

(p = pressione, V: volume, T = temperatura assoluta: costante, R = 1.986 cal/grado)

<u>Elementi essenziali</u>:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una legge ^{f} che a <u>ogni</u> elemento ^{x} dell'insieme di partenza ne associa <u>1 e 1 solo</u> y nell'insieme di arrivo (UNIVOCITA')

Queste tre cose definiscono una FUNZIONE.

SYMB!

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \; / \; f(x) = y$$

f: legge univoca

A: insieme di definizione (... DOMINIO)

$f(A) = \{ y \in B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\exists x \in A$ per cui $f(x) = y \}$: IMMAGINE di f

GRAFICO di f: $G(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x \in A$ e $y = f(x) \}$

$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x \in A$ e $y = f(x)\}$

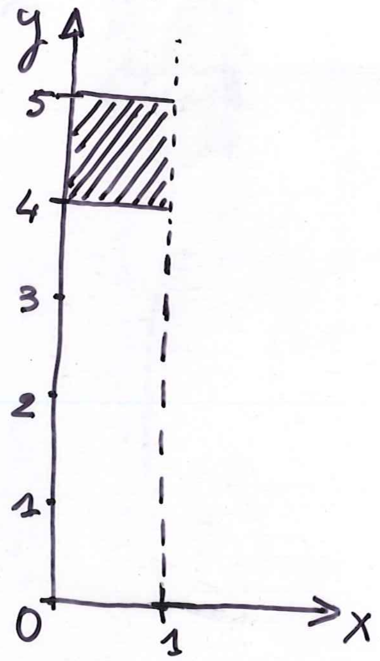
(x,y) coppie ordinate del piano cartesiano

se $x \in \mathbb{R}$
e $y \in \mathbb{R}$ dico che $(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

Se invece volessi indicare le coppie ordinate (x,y) con $x \in (0,1)$ e $y \in (4,5)$

Scriverei $(x,y) \in (0,1) \times (4,5)$.

Queste coppie stanno "all'interno" del quadrato tratteggiato:



in questo caso, essendo i due insiemi sull'asse x e sull'asse y diversi, non posso usare la notazione "con il quadrato" usata per $\mathbb{R}^2$.

ESEMPI

1. $f(x) = -5$

ins. di def. $A =$

immagine $f(A) =$

grafico

2. $f(x) = 4 - 2x$

$A = \mathbb{R}$

$f(A) =$

grafico

x	0	2
$f(x)$		

3. $f(x) = x^2$

$A =$

$f(A) =$

grafico

x	0	1/2	1	3/2	2
$f(x)$					

e $f(x) = -x^2$?

4. $f(x) = \frac{1}{4} x^2$

$A =$

$f(A) =$

grafico

x	0	1/2	1	3/2	2	3
$f(x)$						

$f(x) = 2x^2$?

5. $f(x) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{3}{4}$

$A =$

$f(A) =$

$= \frac{1}{4} (\qquad\qquad\qquad)$

$= \frac{1}{4} (\qquad)^2 - 1$

VEDI SOL. EQ. DI 2° GRADO

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

ANCORA PIÙ SEMPLICE : $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 3$

ASSE DELLA PARABOLA : $x = \frac{-1+3}{2}$

VERTICE : $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, -1)$ ....

RELAZIONE CON LA RISOLUZ. DI DISEQ. DI 2° GRADO

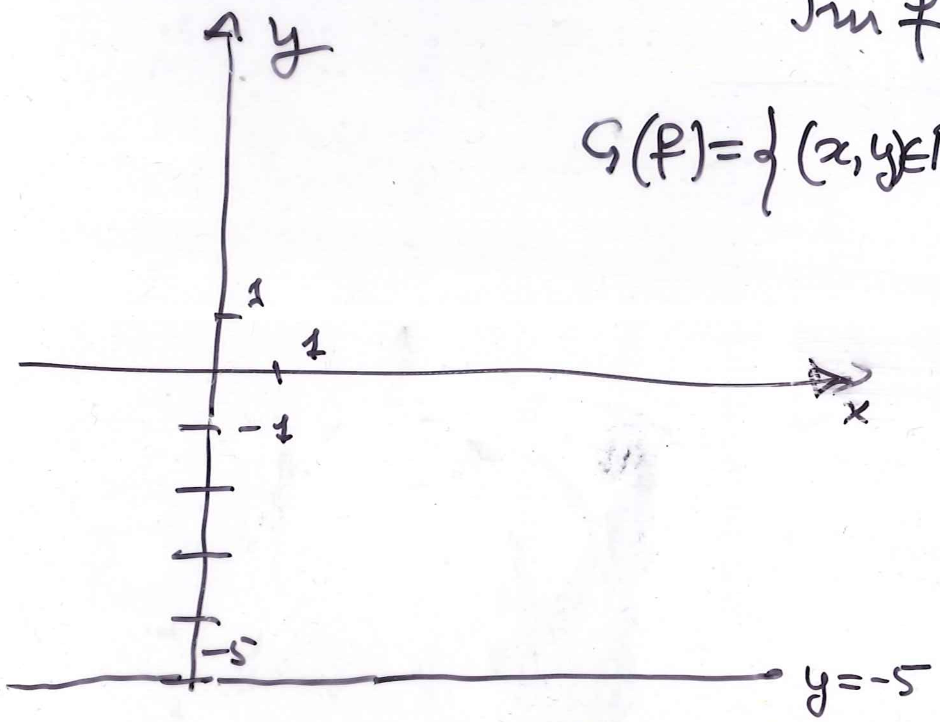
$f(x) = -5$ è una legge. È univoca? SÌ

INS. DEF. $A = \mathbb{R}$

IMMAGINE $f(A) = \{-5\}$

$\mathrm{Im}\, f$ ‖

$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -5\}$



$f(x) = 4 - 2x$ INS. DEF. $A = \mathbb{R}$

$f(A) = ?$

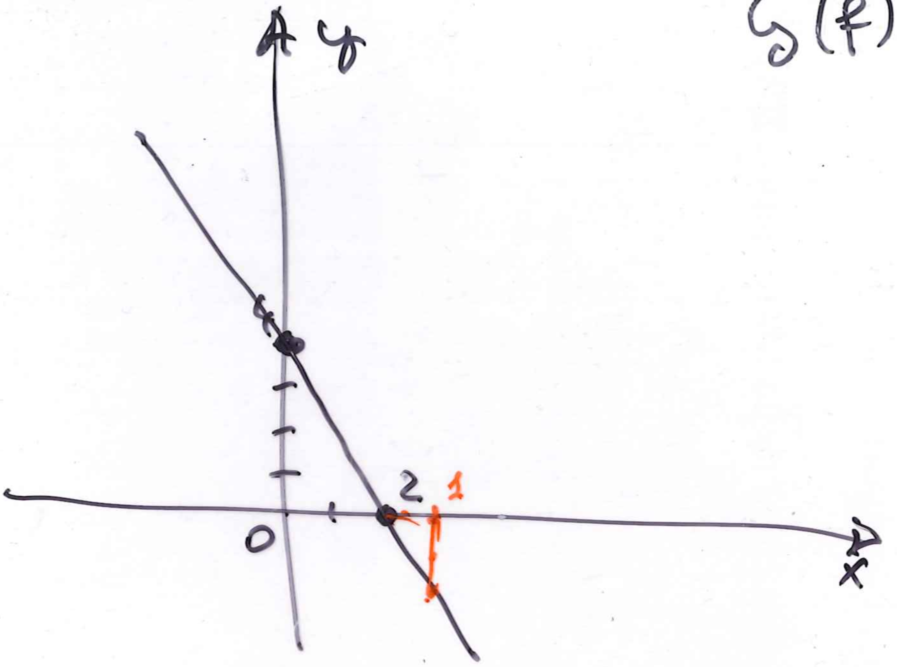
per trovare $f(A)$ cerco per quali y esista $x \mid 4 - 2x = y$ (*)

Risolvo la (*) come equazione in x (penso y fissato): $x = 2 - \frac{y}{2}$

Quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = y$

$\Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$$



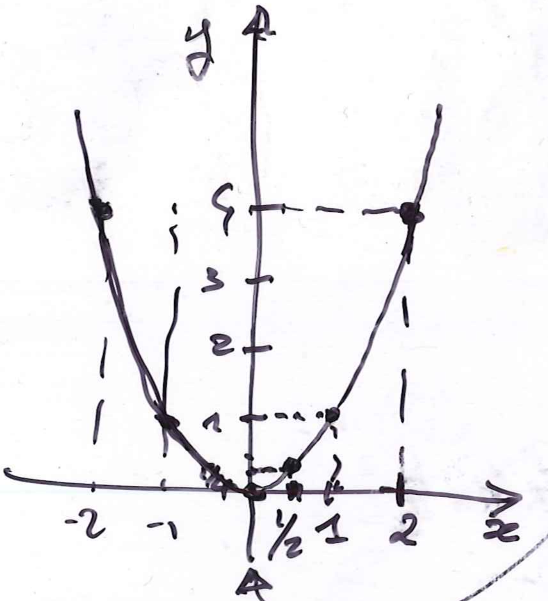
se $x = 0$ $y = 4$

$y = 0$ $x = 2$

$f(x) = x^2$ INS. DEF $A = \mathbb{R}$

$f(A) = [0, +\infty)$

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$



asse di simmetria

$x = 0$

x	0	1	2	1/2
$f(x)$	0	1	4	1/4

$f(x) = 2x^2$

$f(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f(x) = -x^2$

TROVARE LE DIFFERENZE RISPETTO AL GRAFICO PRECEDENTE